ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №1, 1999 Механика

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА КРАЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО УПРУГОГО СЛОЯ

Григорян Э.Х., Саркисян Л.В.

Է.Խ. Գրիգորյան, Լ.Վ. Սարգսյան

Սահքային էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքների դիֆրակցիան էլեկտրահաղորդիչ առաձգական շերտի եզրում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության խնդիրը, որի եզրային մակերևույթին ամրակցված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական կիսանվերջ էլեկտրահաղորդիչ շերտ: Ենթադրվում է, որ պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության ազատ մակերևույթը մետաղացված է և անվերջությունից տարածվում է էլեկտրական մակերևութային ալիք: Ստացված են անդրադարձվող մակերևութային ալիքի, անցնող մակերևութային ալիքի և ծավալային ալիքի ամպլիտուդները: Ստացված են նաև ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են տեղափոխության և էլեկտրական պոտենցիալի վարքերը անվերջությունում:

E.K. Grigorian, L.V. Sarkisian

Diffraction of shearing electric elastic surface waves in the edge of electrical conductive elastic layer

В работе рассматривается задача пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен упругий полубесконечный электропроводящий слой малой толщины. Предполагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства металлизирована и из бесконечности распространяется поверхностная электроупругая волна. Получены амплитуды отраженной и проходящей поверхностной волны, а также амплитуда объемной волны. Получены также асимптотические формулы, характеризующие поведения перемещений и электрического потенциала в бесконечности.

Рассмотрим пьезоэлектрическое полупространство (пьезоэлектрик класса 6mm гексагональной структуты), на граничной поверхности которого прикреплен упругий полубесконечный электропроводящий слой малой толщины h. Пьезоэлектрическое полупространство отнесем к прямоугольной системе координат $0xyz$ так, чтобы ось z совпала с осью симметрии пьезоэлектрика, ось $0x$ была направлена вдоль границы раздела полупространства и полубесконечного проводящего слоя, а полуплоскость $(y=0,\ 0<x<\infty)$ была контактной поверхностью полупространства со слоем. Предполагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства $(y=0, -\infty<x<0)$ металлизирована. Из бесконечности $(x<0)$ вдоль оси $0x$ распространяется поверхностная электроупругая волна [1].

$$\overset{0}{U}_3(x,y,t)=A_0 e^{-\sqrt{\sigma_n^2-k^2}\,y} e^{i(\sigma_n x-\omega t)}$$

$$\overset{0}{\Phi}_3(x,y,t)=A_0\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(e^{-\sqrt{\sigma_n^2-k^2}\,y}-e^{-\sigma_n y}\right)e^{i(\sigma_n x-\omega t)} \tag{1}$$

где $\sigma_n=k/\sqrt{1-\delta^2}$, $\delta=A/B$, $A=e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, $B=c_{44}+e_{15}^2/\varepsilon_{11}$, ε_{11} – диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика, e_{15} – пьезоэлектрическая постоянная, c_{44} – упругая постоянная, $k=\omega/c$, $c=\sqrt{G/\rho}$, $G=c_{44}/(1+\chi^2)$, ρ – плотность материала полупространства,

$\chi^2 = e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44})$ – коэффициент электромеханической связи, t – параметр, характеризующий время, ω - частота колебаний, A_0 – постоянная.

Сдвиговая поверхностная волна, очевидно, дифрагирует на краю упругого электропроводящего слоя. Вопрос состоит в определении амплитуды отраженной поверхностной волны при $x<0$, амплитуды контактных напряжений, амплитуды проходящей поверхностной волны, а также амплитуды объемной волны.

Поле упругих перемещений пьезоэлектрического упругого полупространства представим в виде $U=(0,0,U_3(x,y)e^{-i\omega t})$, перемещение упругого электропроводящего слоя – в виде $U_1=(0,0,U_3^{(1)}(x,y)e^{-i\omega t})$, а электрический потенциал пьезоэлектрического полупространства – в виде $\tilde{\Phi}(x,y)e^{-i\omega t}$.

Поставленная задача формулируется в виде следующих граничных задач [1]:

для пьезоэлектрического полупространства

$$\Delta U_3 + k^2 U_3 = 0,\ \Delta\tilde{\Phi} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Delta U_3,\ 0<y<\infty,\ -\infty<x<\infty \qquad (2)$$

при граничных условиях

$$\tilde{\Phi}\big|_{y=0} = 0,\ -\infty<x<\infty,\ c_{44}\frac{\partial U_3}{\partial y}\bigg|_{y=0} + e_{15}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0,\ -\infty<x<0 \qquad (3)$$

для электропроводящего слоя

$$\Delta U_3^{(1)} + k_1^2 U_3^{(1)} = 0,\ -h<y<0,\ 0<x<\infty \qquad (4)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y}\bigg|_{y=-h} = 0,\ \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \qquad (5)$$

При этом должны выполняться еще и условия контакта

$$U_3(x,0) = U_3^{(1)}(x,0),\ 0<x<\infty \qquad (6)$$

$$c_{44}\frac{\partial U_3}{\partial y}\bigg|_{y=0} + e_{15}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \tau(x),\ 0<x<\infty \qquad (7)$$

Причем $k_1 = \omega/c_1$, $c_1 = (G_1/\rho_1)^{1/2}$, где G_1,ρ_1- соответственно модуль сдвига и плотность материала упругого проводящего слоя,

$$\tau(x) = G_1\left(\frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Далее, интегрируя уравнение (4) по толщине, получим

$$h\frac{d^2\tilde{U}_3^{(1)}}{dx^2} + \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y}\bigg|_{y=0} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial y}\bigg|_{y=-h} + hk_1^2\tilde{U}_3^{(1)} = 0$$

где

$$\tilde{U}_3^{(1)}(x) = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} U_3^{(1)}(x,y)dy$$

Учитывая, что толщина слоя h достаточно мала, предполагается $\tilde{U}_3^{(1)}(x) \approx U_3^{(1)}(x,y)$, следовательно, (4) можно записать в виде

$$\frac{d^2\tilde{U}_3^{(1)}}{dx^2}+k_1^2\tilde{U}_3^{(1)}=-\frac{1}{hG_1}\tau(x) \tag{8}$$

т.е. уравнение (4) можно заменить уравнением (8), а условие (6) – условием

$$\tilde{U}_3^{(1)}(x)=U_3(x,0),\ 0\le x<\infty \tag{9}$$

Теперь, имея в виду (1), введем функции

$$W(x,y)=U_3(x,y)-A_0e^{-\sqrt{\sigma_n^2-k^2}y}e^{i\sigma_n x},$$

$$\Phi(x,y)=\tilde{\Phi}(x,y)-A_0\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(e^{-\sqrt{\sigma_n^2-k^2}y}-e^{-\sigma_n y}\right)e^{i\sigma_n x},$$

$$W_+^{(1)}(x)=\theta(x)U_3^{(1)}(x),\ \tau_+(x)=\theta(x)\tau(x)$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда. Тогда граничная задача (2), (3) с учетом (7) запишется в виде

$$\Delta W+k^2W=0,\ \Delta\Phi=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Delta W,\ 0<y<\infty,\ -\infty<x<\infty \tag{10}$$

$$\Phi\big|_{y=0}=0,\ \tau_+(x)=c_{44}\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=0}+e_{15}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{11}$$

граничная задача (4), (5) в виде

$$\frac{d^2W_+^{(1)}}{dx^2}+k_1^2W_+^{(1)}=U_3^{(1)}(0)\delta\ (x)-\frac{1}{hG_1}\tau_+(x) \tag{12}$$

а условие контакта (9) в виде

$$W_+^{(1)}(x)=W_+(x,0)+\theta(x)A_0e^{ik_0x},\ W_+(x,0)=\theta(x)W(x,0) \tag{13}$$

Далее, применив к (10)-(13) преобразование Фурье, получим

$$\frac{d^2\overline{W}}{dy^2}-\left(\sigma^2-k^2\right)\overline{W}=0,\ \frac{d^2\Phi}{dy^2}-\sigma^2\Phi=\alpha^2\left(\frac{d^2\overline{W}}{dy^2}-\sigma^2\overline{W}\right) \tag{14}$$

$$\overline{\tau}_+(\sigma)=c_{44}\left.\frac{\partial\overline{W}}{\partial y}\right|_{y=0}+e_{15}\left.\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}\right|_{y=0},\ \overline{\Phi}(y)\big|_{y=0}=0 \tag{15}$$

$$\left(k_1^2-\sigma^2\right)\overline{W}_+^{(1)}(\sigma)=-\frac{1}{hG_1}\overline{\tau}_+(\sigma)-i\sigma U_3^{(1)}(0) \tag{16}$$

$$\overline{W}_+^{(1)}(\sigma)=\overline{W}_+(\sigma)-\frac{A_0}{i(\sigma+\sigma_n)} \tag{17}$$

где

$$\bar{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx,\ -\infty<\sigma<\infty,\ \alpha^2=e_{15}/\varepsilon_{11}$$

Из (14) для $\overline{W}$ и $\overline{\Phi}$ получим

$$\overline{W}(x,y)=-\frac{\overline{\tau}_+(\sigma)}{B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|}e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y} \tag{18}$$

$$\overline{\Phi}(\sigma,y)=-\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\overline{\tau}_+(\sigma)}{B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|}\left(e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}-e^{-|\sigma|y}\right) \tag{19}$$

Если еще учитывать (16), (17), для определения $\overline{\tau}_+(\sigma)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{R}(\sigma)\overline{\tau}_+(\sigma)+\overline{W}_-(\sigma,0)=-\frac{i\sigma}{\sigma^2-k_1^2}U_3^{(1)}(0)-\frac{A_0}{i(\sigma+\sigma_n)},$$

$$(-\infty<\sigma<\infty) \tag{20}$$

где $\overline{\tau}_+(\sigma)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>0$, $\overline{W}_-(\sigma,0)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$,

$(\alpha=\sigma+i\tau)$, $\overline{R}(\sigma)=\dfrac{|\sigma|}{(\sigma^2-k_1^2)c_{44}}\overline{K}(\sigma)$,

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{c_{44}}{|\sigma|}\frac{\sigma^2-k_1^2+(hG_1)^{-1}\left(B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|\right)}{B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|}$$

Отметим, что выше имелось в виду условие уходящей волны, из которого следует равенство [2] $\sqrt{\alpha^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\alpha^2}$ во всей комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$. Это означает, что действительная ось $(\tau=0)$ обходит точку ветвления $\sigma=-k$ сверху, а точку $\sigma=k$ - снизу.

Функциональное уравнение (20) можно решать относительно $\overline{\tau}_+(\sigma)$ и $\overline{W}_-(\sigma)$, рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций. Однако здесь мы поступим иначе [3,4].

Сначала факторизуем функцию $\overline{K}(\sigma)$. Поскольку $\overline{K}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, то в силу известной теоремы [2] ее можно записать в виде

$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}_+(\sigma)\overline{K}_-(\sigma) \tag{21}$$

где $\overline{K}_+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>0$, и там не имеется нулей, а $\overline{K}_-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, и там не имеется нулей. Причем

$$\overline{K}_+(\sigma)=\exp\overline{H}_+(\sigma),\quad \overline{K}_-(\sigma)=\exp\overline{H}_-(\sigma)$$

где

$$\overline{H}_+(\sigma)=\int_0^\infty H(U)e^{i\sigma U}dU,\quad \overline{H}_-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 H(U)e^{i\sigma U}dU$$

$$H(U)=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{K}(\sigma)e^{-i\sigma U}d\sigma,\quad -\infty<U<\infty$$

В выражении $H(U)$ контур интегрирования обходит точки $-\sigma_n,-\tilde{\sigma}_n,-k$ сверху, а точки $\sigma_n,\tilde{\sigma}_n,k$ снизу. Точки $\pm\sigma_n,\pm\tilde{\sigma}_n$ являются нулями функции

$$\varphi_1(\sigma)=B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|,\quad \varphi_2(\sigma)=\sigma^2-k_1^2+(hG_1)^{-1}\varphi_1(\sigma)$$

соответственно.

Далее заметим, что

$$\frac{|\sigma|}{\sigma^2-k_1^2}=\frac{(\sigma-i0)^{1/2}}{\sigma-k_1}\frac{(\sigma+i0)^{1/2}}{\sigma+k_1}$$

где

$$(\sigma-i0)^{1/2}=\sigma_+^{1/2}-i\sigma_-^{1/2},\quad (\sigma+i0)^{1/2}=\sigma_+^{1/2}+i\sigma_-^{1/2},$$

$$\sigma_+^{1/2}(\sigma)=\theta(\sigma)\sigma^{1/2},\quad \sigma_-^{1/2}(\sigma)=\theta(-\sigma)|\sigma|^{1/2}.$$

Очевидно, что аналитическое продолжение функции $\sqrt{(\sigma-i0)}/(\sigma-k_1)$ регулярно при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\sqrt{(\sigma+i0)}/(\sigma+k_1)$ регулярно при $\operatorname{Im}\alpha>0$, (действительная ось обходит точку $\sigma=-k_1$ сверху, а

$\sigma = k_1$ снизу). Таким образом, факторизация функции $\overline{R}(\sigma)$ проведена и она имеет вид

$$\overline{R}(\sigma) = \overline{R}_+(\sigma)\overline{R}_-(\sigma) \tag{22}$$

где

$$\overline{R}_+(\sigma) = \frac{(\sigma + i0)^{1/2}}{\sqrt{c_{44}}(\sigma + k_1)}\overline{K}_+(\sigma), \quad \overline{R}_-(\sigma) = \frac{(\sigma - i0)^{1/2}}{\sqrt{c_{44}}(\sigma - k_1)}\overline{K}_-(\sigma)$$

Согласно формуле (22), уравнение (20) запишется в виде

$$\overline{R}_+(\sigma)\overline{\tau}_+(\sigma) + \frac{\overline{W}_-(\sigma)}{\overline{R}_-(\sigma)} = -\frac{i\sigma}{\sigma^2 - k_1^2}\frac{U_3^{(1)}(0)}{\overline{R}_-(\sigma)} - \frac{A_0}{i(\sigma + \sigma_n)\overline{R}_-(\sigma)} \tag{23}$$

Далее нетрудно видеть, что (23) можно представить в виде

$$\overline{L}_+(\sigma) = \overline{R}_+(\sigma)\overline{\tau}_+(\sigma) - \overline{E}_+(\sigma) = \overline{E}_-(\sigma) - \frac{\overline{W}_-(\sigma,0)}{\overline{R}_-(\sigma)} = \overline{L}_-(\sigma) \tag{24}$$

где

$$\overline{E}_+(\sigma) = -\frac{\sqrt{c_{44}}\sqrt{k_1}U_3^{(1)}(0)}{\overline{K}_+(k_1)(\sigma + k_1)} + \frac{A_0\sqrt{c_{44}}(\sigma_n + k_1)}{\sqrt{\sigma_n}(\sigma + \sigma_n)\overline{K}_+(\sigma_n)}$$

$$\overline{E}_-(\sigma) = iA_0\sqrt{c_{44}}\left(\frac{\sigma - k_1}{(\sigma - i0)^{1/2}\overline{K}_-(\sigma)(\sigma + \sigma_n)} + \frac{i(\sigma_n + k_1)}{\sqrt{\sigma_n}\overline{K}_+(\sigma_n)(\sigma + \sigma_n)}\right) -$$

$$-i\sqrt{c_{44}}U_3^{(1)}(0)\left(\frac{(\sigma - i0)^{1/2}}{(\sigma + k_1)\overline{K}_-(\sigma)} + \frac{i\sqrt{k_1}}{\overline{K}_+(k_1)(\sigma + k_1)}\right)$$

Как видно из (24), в левой части равенства стоит преобразование Фурье функции, равной нулю при $x < 0$, а в правой части равенства стоит преобразование Фурье функции, равной нулю при $x > 0$, т.е. $L_+(x) \equiv L_-(x)$.

Вышесказанное говорит о том, что $L_+(x)$ и $L_-(x)$ являются обобщенными функциями, сосредоточенными в нулевой точке. Известно [5], что функция, сосредоточенная в нуле, представляется в виде конечной линейной комбинации функций $\delta^{(k)}(x)$ $(k = 0,1\ldots n)$ ($\delta^{(k)}(x)$ - производные функции Дирака $\delta(x) = \delta^{(0)}(x)$).

Следовательно,

$$L_+(x) = L_-(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}(x) \tag{25}$$

Применив к (25) преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций, получим

$$\overline{L}_+(\sigma) = \overline{L}_-(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} (-i)^k a_k \sigma^k \tag{26}$$

Далее определим поведение функции $\overline{L}_\pm(\sigma)$ при $\sigma \to \pm\infty$.

Поскольку $W(x,0)$ принимает конечное значение при $x = 0$, то $\overline{W}_-(\sigma,0) \approx \overline{W}(0,0)(i(\sigma - i0))^{-1}$ при $\sigma \to \pm\infty$ $\left((\sigma - i0)^{-1} = (i\sigma)^{-1} + \pi\delta(\sigma)\right)$. Далее известно, что $\tau(x) \approx A/\sqrt{x}$ при $x \to +0$ Это говорит о том, что $\overline{\tau}_+(\sigma)$ имеет порядок $O\left((\sigma + i0)^{-1/2}\right)$ при $\sigma \to \pm\infty$. Если еще учесть, что $\overline{R}_+(\sigma)$ имеет порядок $O\left((\sigma + i0)^{-1/2}\right)$, $\overline{R}_-(\sigma)$ - порядок $O\left((\sigma - i0)^{1/2}\right)$ при

$\sigma \to \pm\infty$, а $E_+(\sigma) \approx O(\sigma^{-1})$, $E_-(\sigma) \approx O(\sigma^{-1})$ при $\sigma \to \pm\infty$, то для $\overline{L}_\pm(\sigma)$ получим

$$\overline{L}_+(\sigma) \to 0,\ \overline{L}_-(\sigma) \to 0 \text{ при } \sigma \to \pm\infty$$

Следовательно, из (26) $\overline{L}_+(\sigma) = \overline{L}_-(\sigma) \equiv 0$. В таком случае из (24) для $\overline{\tau}_+(\sigma)$, $\overline{W}_-(\sigma,0)$ получим

$$\overline{\tau}_+(\sigma) = \frac{\overline{E}_+(\sigma)}{\overline{R}_+(\sigma)},\ \overline{W}_-(\sigma,0) = \overline{E}_-(\sigma)\overline{R}_-(\sigma)$$

Если заметить, что $\sigma = k_1$ не может быть полюсом для $\overline{W}_-(\sigma,0)$, то можно определить $U_3^{(1)}(0)$ в виде

$$U_3^{(1)}(0) = \frac{2iA_0\sqrt{k_1}\,\overline{K}_+(k_1)c_{44}}{\sqrt{\sigma_n}\,\overline{K}_+(\sigma_n)\left(ic_{44} + hG_1k_1\overline{K}_+^2(k_1)\right)}.$$

Теперь приступим к исследованию функций $\overline{W}_-(x,0)$, $\overline{W}_+(x,0)$. Имеем $\overline{W}_-(x,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\overline{W}_-(\sigma,0)e^{-i\sigma x}d\sigma$

$\overline{W}_-(\sigma,0)$ представим в виде (23)

$$\overline{W}_-(\sigma,0) = \frac{\sqrt{c_{44}}\,\overline{E}_-(\sigma)}{(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma-k_1)\overline{K}_+(\sigma)}\frac{\sigma^2 - k_1^2 + (hG_1)^{-1}\varphi_1(\sigma)}{\varphi_1(\sigma)} \tag{27}$$

Как видно из (27), функцию $\overline{W}_-(\sigma,0)$ невозможно аналитически продолжить в комплексной плоскости, поскольку в ней участвует функция $|\sigma|$. Для этого представим $\overline{W}_-(\sigma,0)$ в таком виде, чтобы к ней можно было применить методы функций комплексного переменного. Оказывается, что $\overline{W}_-(\sigma,0)$ можно представить в виде

$$\overline{W}_-(\sigma,0) = \frac{Bf_1(\sigma)\sqrt{\sigma^2-k^2}}{\overline{K}_+(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}\left[(B^2-A^2)\sigma^2 - B^2k^2\right]} + \frac{Af_1(\sigma)(\sigma-i0)^{1/2}}{\overline{K}_+(\sigma)\left[(B^2-A^2)\sigma^2-B^2k^2\right]} +$$

$$+\frac{f_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2-k_1^2)\overline{K}_+(\sigma)(\sigma-i0)^{1/2}} - \frac{iU_3^{(1)}(0)}{\sigma^2-k_1^2} + \frac{iA_0}{\sigma+\sigma_n}$$

где $f_1(\sigma) = \dfrac{c_{44}U_{3+}^{(1)}(0)k_1^{1/2}}{\overline{K}_-(-k_1)} - \dfrac{c_{44}(\sigma_n+k_1)(\sigma+k_1)A_0}{\sigma_n^{1/2}\overline{K}_+(\sigma_n)(\sigma+\sigma_n)}$

Тогда $W_-(x,0)$ можно представить в виде

$$W_-(x,0) = \frac{B}{2\pi}I_1 + \frac{A}{2\pi}I_2 + I_3$$

где $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\sigma)\sqrt{\sigma^2-k^2}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\overline{K}_+(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}\left[(B^2-A^2)\sigma^2-B^2k^2\right]}$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\sigma)(\sigma-i0)^{1/2}e^{-i\sigma x}d\sigma}{\overline{K}_+(\sigma)\left[(B^2-A^2)\sigma^2-B^2k^2\right]}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f_1(\sigma)}{hG_1(\sigma^2-k_1^2)\overline{K}_+(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}} - \frac{iU_3^{(1)}(0)\sigma}{\sigma^2-k_1^2} + \frac{iA_0}{\sigma+\sigma_n}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma$$

The present problem of vibrations of a shell is investigated on the base of the following hypotheses:

–The hypotheses of the magnetoelasticity of thin bodies [4] according to which

$$e_\alpha = e_1 = \varphi(\alpha,\beta,t),\ e_\beta = e_2 = \psi(\alpha,\beta,t),\ h_\gamma = h_3 = f(\alpha,\beta,t) \quad (2.1)$$

where $\mathbf{h}\left(h_1,h_2,h_3\right)$, $\mathbf{e}\left(e_1,e_2,e_3\right)$ are the inducted electromagnetic fields components, φ,ψ,f are desired arbitrary functions, which must satisfy the electrodynamic equations, and the conditions on the surfaces of the shell $\left(\gamma=\pm\dfrac{h}{2}\right)$ [4];

—The hypothesis of improved theory of anisotropic shells [1,3,10] according to which

$$u_1 = u_\alpha = \left(1+k_1\gamma\right)u - \gamma\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \gamma\frac{h^2}{8}\left(1+\frac{k_1}{2}\gamma-\frac{4}{3}\frac{\gamma^2}{h^2}\right)a_{55}\Phi$$

$$u_2 = u_\beta = \left(1+k_2\gamma\right)v - \gamma\frac{\partial w}{\partial\beta} + \gamma\frac{h^2}{8}\left(1+\frac{k_2}{2}\gamma-\frac{4}{3}\frac{\gamma^2}{h^2}\right)a_{44}\Psi$$

$$u_3 = u_\gamma = w \quad (2.2)$$

where $u(\alpha,\beta,t), v(\alpha,\beta,t), w(\alpha,\beta,t)$ are the desired displacements of the shells middle surface, $\Phi(\alpha,\beta,t), \Psi(\alpha,\beta,t)$ are desired functions which characterize shear deformations of the shell, $k_1 = k_1(\alpha,\beta), k_2 = k_2(\alpha,\beta)$ are principal curvatures of the coordinate surface $\alpha 0 \beta$, (For shallow shells it is assumed that the k_i upon differentiation behave as constants[1]), $a_{55}=G_{31}^{-1}, a_{44}=G_{23}^{-1}$ are the elasticity coefficients, G_{31}, G_{32} , are shear moduli.

The equations of motion of the shell are [1,2,4]

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S_{12}}{\partial\beta} = -\int_{-h/2}^{h/2} k\rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}d\gamma$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha} = -\int_{-h/2}^{h/2} k\rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}d\gamma$$

$$-\left(k_1T_1+k_2T_2\right)+\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_2}{\partial\beta} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\beta}-N_1 = -\int_{-h/2}^{h/2} k\gamma\rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k\gamma\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}d\gamma$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\alpha}-N_2 = -\int_{-h/2}^{h/2} k\gamma\rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k\gamma\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}d\gamma \quad (2.3)$$

where $k=\left(1+k_1\gamma\right)\left(1+k_2\gamma\right)$, T_i, S_{ik}, N_i, M_i are the internal forces and moments, ρ is the shell material density, t is the time, ρK_i are the components of the "cargo" term for which we have generally [2,4]

$$\rho K\left(K_1,K_2,K_3\right) = \left[\sigma_i\right]\frac{1}{c}\left(e+\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\times B_0\right)\times B_0 \quad (2.4)$$

B is the magnetic induction vector in shell, $u\left(u_1,u_2,u_3\right)=u\left(u_\alpha,u_\beta,u_\gamma\right)$ is the displacement vector, c is the electrodynamic constant.

3. The Equations of Magnetoelasticity for a Thin Orthotropic Shell

Integrating electrodynamic equations with the account of the surface conditions $h_i = h_i^+$, when $\gamma = \frac{h}{2}$ and $h_i = h_i^-$, when $\gamma = -\frac{h}{2}$, for h_i we obtain [2,4]

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{4\pi\sigma_2}{c}\psi\right) - \frac{4\pi\sigma_2 B_0}{c^2}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial t} - b\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t} + c_1 a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{4\pi\sigma_1}{c}\varphi\right) - \frac{4\pi\sigma_1 B_0}{c^2}\left(a_2\frac{\partial v}{\partial t} - b\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t} + c_2 a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \quad (3.1)$$

where

$$a_i = \gamma + \frac{\gamma^2}{2}k_i - \frac{h^2}{8}k_i,\; b = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{h^2}{8}$$

$$c_i = \frac{\gamma^2 h^2}{16} - \frac{\gamma^4}{24} - \frac{5h^4}{384} + \frac{\gamma^3 h^2}{48}k_i$$

Then we have

$$\sigma_3 e_3 = -\gamma\left(\sigma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - \frac{B_0}{c}\left[\sigma_1\left(a_2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial t} - b\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta\partial t} + c_2 a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial t}\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma_2\left(a_1\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial t} - b\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta\partial t} + c_1 a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\partial t}\right)\right] \quad (3.2)$$

Thus, we have all the components of excited electromagnetic field in the shell, given by eight functions $u, v, w, \Phi, \Psi, \varphi, \psi, f$ and by induced magnetic field's values h_1 and h_2 on the shell's surfaces $\left(\gamma = \pm\frac{h}{2}\right)$.

Then from (2.4) for the components of the "cargo" term we obtain

$$\rho K_1 = \frac{\sigma_2}{c}\left\{B_0\psi - \frac{B_0^2}{c}\left[(1 + k_1\gamma)\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8}k_1\right)a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\}$$

$$\rho K_2 = -\frac{\sigma_1}{c}\left\{B_0\varphi + \frac{B_0^2}{c}\left[(1 + k_2\gamma)\frac{\partial v}{\partial t} - \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8}k_2\right)a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right]\right\} \quad (3.3)$$

Substituting the values of internal forces and moments, components of displacements and components of the "cargo" term in (2.3) we get the following equations of motion [1,2,4]

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + (C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + (k_1 c_{11} + k_2 c_{12})\frac{\partial w}{\partial\alpha} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} -$$
$$-\frac{\sigma_2}{c}\left\{B_0 h\psi - \frac{B_0^2}{c}\left[h\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h^3}{12}(k_1 + k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t} + \frac{h^5}{120}(1.625k_1 + k_2)a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\}$$

$$C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + (C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + (k_2 C_{22} + k_1 C_{12})\frac{\partial w}{\partial\beta} = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$$
$$+\frac{\sigma_1}{c}\left\{B_0 h\varphi + \frac{B_0^2}{c}\left[h\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{h^3}{12}(k_1 + k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t} + \frac{h^5}{120}(1.625k_2 + k_1)a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right]\right\}$$

$$-(k_1 C_{11} + k_2 C_{12})\frac{\partial u}{\partial\alpha} - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12})\frac{\partial v}{\partial\beta} - (k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22})w -$$

$$A_{-1}^{(-\bar{\bar{\lambda}}_n)} = i(\tilde{\sigma}_n - k_1)\sqrt{\tilde{\sigma}_n}\,\overline{K}_+(\tilde{\sigma}_n)\overline{E}_+(-\tilde{\sigma}_n)\Big/\sqrt{c_{44}}\left.\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=-\tilde{\sigma}_n} \quad \text{при } \varphi < \tilde{\varphi}_0$$

$$A_{-1}^{(-\bar{\bar{\lambda}}_n)} = 0 \text{ при } \varphi > \tilde{\varphi}_0$$

$$\left(\frac{df}{d\sigma}\right)^{-1}_{\sigma=-\tilde{\sigma}_n} = \frac{A\tilde{\sigma}_n + hG_1\left(k_1^2 - \tilde{\sigma}_n^2\right)}{(hG_1)^{-1}\tilde{\sigma}_n\left(A^2 - B^2\right) + \left(k_1^2 - \tilde{\sigma}_n^2\right)\left(A - 2\tilde{\sigma}_n hG_1\right) - 2\tilde{\sigma}_n^2 A}$$

Если $k_1 = \sigma_n = \tilde{\sigma}_n$, то $A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} = \bar{\tau}_+(-\sigma_n)A/\left(A^2 - B^2\right)$, $A_{-1}^{(-\bar{\bar{\lambda}}_n)} = 0$ при $\varphi < \varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$, а при $\varphi > \varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$ $A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} = 0$

Поступая аналогичным образом, как выше, для $W(r,\varphi)$ при $\pi/2 < \varphi < \pi$ получим

$$W(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\overline{W}(\sigma_2,\varphi) - \frac{A_{-1}^{(-\lambda_n)}}{\lambda+\lambda_n} - \frac{A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)}}{\lambda+\tilde{\lambda}_n} - \frac{A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)}}{\lambda+\bar{\lambda}_n}\right]e^{i\lambda r}d\lambda + iA_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)}e^{i\bar{\lambda}_n r} \tag{31}$$

где

$$\overline{W}(\sigma_2,\varphi) = \frac{C\sqrt{\sigma_2 - i0}\,\overline{K}_-(\sigma_2)(a\sigma_2 + b)}{(\sigma_2 + \sigma_n)\left(hG_1(\sigma_2^2 - k_1^2) + B\sqrt{\sigma_2^2 - k^2} - A\,\mathrm{sgn}(\lambda - k\sin\varphi)\sigma_2\right)}\frac{d\sigma_2}{d\lambda}$$

$$C = -hG_1\Big/\left[\overline{K}_-(-k_1)\overline{K}_-(-\sigma_n)\sqrt{\sigma_n}\right],\ \sigma_2(\lambda) = \lambda|\cos\varphi| - i\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,\sin\varphi$$

$$\sigma_2(-\lambda_n) = -\sigma_n,\ \sigma_2(\lambda_n) = \sigma_n$$

$$A_{-1}^{(-\lambda_n)} = -iC\sqrt{\sigma_n}\,\overline{K}_+(\sigma_n)(b - a\sigma_n)\left[hG_1(\sigma_n^2 - k_1^2)\right]^{-1}$$

$$A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = \frac{-i\sqrt{\tilde{\sigma}_n}\,\overline{K}_+(\tilde{\sigma}_n)(b - a\tilde{\sigma}_n)\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2 - k^2}\,C}{(\sigma_n - \tilde{\sigma}_n)\left(\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2 - k^2}\left(A - 2hG_1\tilde{\sigma}_n\right) - B\tilde{\sigma}_n\right)}$$

$$A_{-1}^{(\bar{\lambda}_n)} = \bar{\tau}_+(\sigma_n)A/\left(A^2 - B^2\right) \qquad \text{при } \pi/2 + \psi_0 < \varphi < \pi,$$

$$A_{-1}^{(\bar{\lambda}_n)} = 0 \qquad \text{при } \pi/2 < \varphi < \pi/2 + \psi_0,$$

где $\psi_0 = \mathrm{arctg}\,k/\sigma_n$, $k/\sigma_n < 1$.

Получим асимптотические выражения для функции перемещения $W(r,\varphi)$ с помощью метода Лайтхила [7]. При этом оказывается, что когда $x > 0$, функция $W(r,\varphi)$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$W(r,\varphi) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}}b_1 e^{i(3\pi/4 - kr)} - \frac{2\sqrt{\pi}}{r^{3/2}}b_3 e^{i(\pi/4 + kr)} + \tag{32}$$

$$+ c_4\frac{3}{4\sqrt{\pi}}e^{i(3\pi/4 - kr\sin\varphi)} + iA_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)}e^{i\bar{\lambda}_n r} + iA_{-1}^{(-\bar{\bar{\lambda}}_n)}e^{i\bar{\bar{\lambda}}_n r} + O(r^{-2}) \text{ при } r \to \infty$$

а когда $x < 0$, имеем

$$W(r,\varphi) = \frac{ia_1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{\pi}c_2}{r^{3/2}}e^{i(kr\sin\varphi - \pi/4)} + \frac{ia_3}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(\pi/4 - kr)}}{r^{3/2}} + iA_{-1}^{(\bar{\lambda}_n)}e^{i\bar{\lambda}_n r} + O(r^{-2}) \tag{33}$$

при $r \to \infty$

Здесь выражения искомых постоянных $b_i, c_i, a_i, b_i, c_i, a_i$ не приводятся.

Переходим к обсуждению $\Phi(x,y)$. Применив обратное преобразование Фурье к (19), получим

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}W(x,y)+\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\tau}_+(\sigma)e^{-i\sigma x-|\sigma|y}}{B\sqrt{\sigma^2-k^2}-A|\sigma|}d\sigma \tag{34}$$

Поступая как выше и используя работу [6], для $\Phi(x,y)$ при $x>0$ получим следующую асимптотическую формулу:

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}W(x,y)+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{(b-a\sigma_n)}{\overline{K}_+(k_1)(\sigma_n^2-k_1^2)}e^{i\sigma_n Z_0 r}+ \tag{35}$$

$$+\frac{hG_1e_{15}\overline{K}_+(\tilde{\sigma}_n)\sqrt{\tilde{\sigma}_n}(b-a\tilde{\sigma}_n)\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2-k^2}}{\varepsilon_{11}\sqrt{\sigma_n}\overline{K}_+(k_1)\overline{K}_+(\sigma_n)(\sigma_n-\tilde{\sigma}_n)\left(A\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2-k^2}-B\tilde{\sigma}_n-2hG_1\tilde{\sigma}_n\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2-k^2}\right)}e^{i\tilde{\sigma}_n Z_0 r}+$$

$$+\frac{Be_{15}\sqrt{2Z_0}k^{3/2}\overline{K}_+(k)(b-ak)}{\pi\varepsilon_{11}\sqrt{\sigma_n}\overline{K}_+(k_1)\overline{K}_+(\sigma_n)\overline{Z}_0(\sigma_n-k)\left(k^2Z_0^2-Z_0^2k_1^2-kZ_0A\right)^2}\frac{e^{i(krZ_0-3\pi/4)}}{|x|^{3/2}}+O\left(|x|^{-5/2}\right)$$

а при $x<0$

$$\Phi(x,y)=\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}}W(x,y)+\frac{e_{15}i}{\varepsilon_{11}}\frac{\sqrt{\sigma_n^2-k^2}\,\overline{\tau}_+(\sigma_n)}{B\sigma_n-A\sqrt{\sigma_n^2-k^2}}e^{i\sigma_n(x+iy)}-\frac{e_{15}Bi}{\varepsilon_{11}\pi}\frac{\sqrt{2\sigma_n Z_0}\,\overline{\tau}_+(k)}{A^2-k^2Z_0^2}\times$$

$$\times\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\sigma_n x+i\sigma_n y\right)}}{|x|^{3/2}}+\frac{\overline{\tau}_+(0)2i\sin\varphi}{Bk}\frac{1}{r}+O\left(r^{-5/2}\right)$$

где $Z_0=|\cos\varphi|+i\sin\varphi$, $\overline{Z}_0=|\cos\varphi|-i\sin\varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. -М.: Наука, 1982.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. -М.: ИЛ, 1962.
3. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. -М.: Наука, 1971.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. -Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, №3.
5. Справочник математическая библиотека функциональный анализ. -М.: Наука, 1972.
6. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства. -Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №3, с.23-30.
7. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and genaralized functions. -Cambridge Univ. Press, 1959.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 30.06.1998