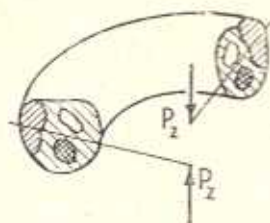


П. В. ГАЛПЧЯН

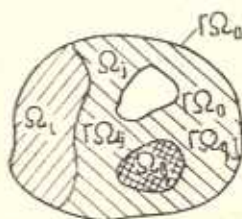
ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРИВОГО СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача о пластическом кручении кривого стержня в виде сектора кругового кольца, составленного из различных материалов. Постоянное по длине меридиональное сечение составного стержня образуется из областей Ω_l ($l = 1, 2, \dots, N$), соответствующих различным однородным, изотропным материалам (фиг. 2). Стержень скручивается противоположными силами P_z , действующими на торцевых сечениях по оси кольца (фиг. 1). Материалы соответствующих областей Ω_l подчиняются условию изотропного упрочнения.

Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, в линейно-упругой постановке было рассмотрено в [1—7]. Кручение однородных, изотропных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [8, 9]. Достаточно полная библиография по этой области содержится в [8, 9, 12, 13].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В настоящей работе исследованы случаи, когда контур области образуется из координатных линий. Обобщается теорема о циркуляции деформации сдвига. Предполагается, что каждый из материалов является упруго-пластическим, причем пластическая часть деформации обладает степенным упрочнением. Исследуются условия простого нагружения для этих материалов.

Рассматриваются две задачи. В первом случае стержень состоит из нескольких слоев. Эта задача рассматривается в точной постановке. В частном случае двухслойного стержня в явном виде выводится формула для функций напряжений.

Во втором случае рассмотрены двухслойный тонкостенный стержень замкнутого профиля. Для профиля в виде кольцевого сектора получены приближенные решения и приведен численный пример.

1. *Постановка задачи.* Принимается сферическая система координат r, θ, φ , связанная с прямоугольной системой x, y, z по формулам $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Ось z совпадает с осью кольца. Обозначим через $\Gamma\Omega_0$ границу области всего меридионального сечения стержня Ω_0 , через $\Gamma\Omega_l$ — границу области Ω_l и через $\Gamma\Omega_{lj}$ — линию раздела смежных областей Ω_l и Ω_j , причем $\Gamma\Omega_{lj}$ либо целиком лежит внутри Ω_0 , либо пересекается с $\Gamma\Omega_0$ под углом, отличным от нуля. В общем случае полого составного стержня, $\Gamma\Omega_0$ состоит из нескольких замкнутых линий $\Gamma^{(k)}\Omega_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m$) (фиг. 2).

Зависимости между компонентами тензоров деформаций и напряжений в Ω_l имеют вид

$$\varepsilon_{jk}^{(l)} = f_l(T_l) (\sigma_{jk}^{(l)} - \sigma^{(l)} \delta_{jk}) / 2G_l, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь T_l — интенсивность касательных напряжений, $f_l(T_l)$ — функция, характеризующая упрочнение материала, $\sigma^{(l)}$ — среднее давление в точке, δ_{jk} — символ Кронекера, G_l — модуль сдвига. $f_l(T_l) \equiv 1$ соответствует линейно-упругому материалу. Упругая часть составляющих полной деформации в (1.1) будет

$$e_{jk} = (\sigma_{jk}^{(l)} - \sigma^{(l)} \delta_{jk}) / 2G_l$$

Предполагается, что все компоненты напряжения тождественно равны нулю, за исключением $\tau_{\theta\varphi}^{(l)}$ и $\tau_{\varphi r}^{(l)}$, которые не зависят от φ . Тогда, как и при кручении однородных круговых стержней [8], получаем следующие выражения для компонентов деформаций:

$$2\varepsilon_{\varphi r}^{(l)} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r} \right) + \frac{A}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad 2\gamma_{\theta\varphi}^{(l)} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_{\varphi 0}^{(l)}}{r \sin \theta} \right) - \frac{A}{r} \quad (1.2)$$

где $u_{\varphi 0}^{(l)}$ — произвольная функция r и θ , $A = \text{const}$ — крутка. Соотношения (1.2) справедливы в замкнутой области Ω_l .

Для перемещений будем иметь

$$u_r^{(l)} \equiv u_r = A\varphi \cos \theta, \quad u_\theta^{(l)} \equiv u_\theta = -A\varphi \sin \theta, \quad u_\varphi^{(l)} = u_{\varphi 0}^{(l)}(r, \theta) + Br \sin \theta$$

$$B = \frac{1}{r^*} u_{\varphi 0}^{(l_*)}(r^*, \pi/2) - \frac{\partial u_{\varphi 0}^{(l_*)}(r^*, \pi/2)}{\partial r}, \quad r^* \in [r_1, r_2]$$

где r^* и l_* — фиксированные значения соответственно r и l .

Из выражений (1.2) следует уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial \gamma_{\theta\varphi}^{(l)}}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tau_{\varphi r}^{(l)}}{r \sin \theta} \right) = \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.3)$$

Вводя функцию напряжений Φ

$$\tau_{\varphi r}^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta\varphi}^{(l)} = \frac{2AG_l}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r} \quad (1.4)$$

из (1.1) и (1.3) получим уравнения, которым должны удовлетворять функции $\Phi^{(i)}$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f_i(T_i)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} \right] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_i(T_i)}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.5)$$

когда $(r, \theta) \in \Omega_i - \Gamma\Omega_i$

$$T_i = \frac{2AG_i}{r^2 \sin^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \theta} \right)^2}$$

Здесь $\Phi^{(i)}$ представляет функцию напряжений Φ в области Ω_i .

Рассматривая условия на боковой поверхности стержня, приходим к условию $\Phi = \text{const}$ на $\Gamma\Omega_0$. В случае полого составного стержня с m полостями на каждом контуре $\Gamma^{(k)}\Omega_0$ функция Φ принимает различные постоянные значения.

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела $\Gamma\Omega_{ij}$ смежных областей Ω_i и Ω_j , имеем

$$G_i \Phi^{(i)} = G_j \Phi^{(j)} + c_{ij}, \text{ когда } (r, \theta) \in \Gamma\Omega_{ij} \quad (1.6)$$

где c_{ij} — произвольная постоянная.

Подставив выражения $\gamma_{\varphi r}^{(i)}$ и $\gamma_{\theta \varphi}^{(i)}$ из (1.1) в (1.2), получим

$$\begin{aligned} f_i(T_i) \frac{\gamma_{\varphi r}^{(i)}}{G_i} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{\varphi 0}^{(i)}}{r} \right) + \frac{A}{r} \text{ctg } \theta \\ f_i(T_i) \frac{\gamma_{\theta \varphi}^{(i)}}{G_i} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_{\varphi 0}^{(i)}}{r \sin \theta} \right) - \frac{A}{r} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Дифференциальные соотношения (1.7) справедливы в Ω_i . Умножив первое из них на $\cos(t, \theta)$, второе на $\cos(t, r)$, вычитая результаты и используя (1.4), находим

$$-\frac{2Af_i(T_i)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial t} = r \sin \eta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_{\varphi 0}^{(i)}}{r \sin \theta} \right) + A \left(\frac{\text{ctg } \theta}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial \theta}{ds} \right) \quad (1.8)$$

где t и s — нормаль и касательная к $\Gamma\Omega_{ij}$.

Аналогичное (1.8) соотношение получаем, приближаясь к линии раздела $\Gamma\Omega_{ij}$ со стороны области Ω_j . Вычитая эти соотношения и принимая во внимание непрерывность перемещения u_z , находим условия

$$f_i(T_i) \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial t} = f_j(T_j) \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial t}, \text{ когда } (r, \theta) \in \Gamma\Omega_{ij} \quad (1.9)$$

В общем случае полого составного стержня можно принимать $\Phi = 0$ на внешнем контуре $\Gamma^{(0)}\Omega_0$. Тогда произвольные постоянные c_{ij} в (1.6) также равны нулю. Что касается значений Φ на внутренних контурах

$\Gamma^{(k)} \Omega_0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), то они определяются из уравнения, являющегося обобщением теоремы о циркуляции сдвига при кручении.

Пусть $\Omega \subset \Omega_l$. Интегрируя обе части уравнения (1.5) по области Ω и переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\oint_{\Gamma \Omega} \frac{1}{r^3 \sin^3 \theta} f_l \left(\frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} \mid \text{grad } \Phi^{(l)} \mid \right) \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} ds = \oint_{\Gamma \Omega} \frac{d\theta}{r \sin^3 \theta} \quad (1.10)$$

где t и s — внешняя нормаль и дуга $\Gamma \Omega$. Соотношение (1.10) было получено в предположении, что $\Gamma \Omega \subset \Omega_l$, но используя условие (1.9), его можно обобщить и в случае, когда $\Gamma \Omega \subset \Omega_0$.

Таким образом, задача сводится к определению функции Φ , удовлетворяющей в соответствующих областях $\Omega_l - \Gamma \Omega_l$ уравнению (1.5), граничному условию $\Phi = \text{const}$ на $\Gamma \Omega_0$ и условиям на линиях раздела $\Gamma \Omega_l$ (1.6), (1.9).

Для силы P_z имеем следующее выражение:

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^N G_l \oint_{\Gamma \Omega_l} \frac{\Phi^{(l)} d\theta}{r \sin^3 \theta} - \frac{\Phi^{(l)} \cos \theta dr}{r^2 \sin^2 \theta} + 2A \sum_{l=1}^N G_l \int_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^3 \sin^3 \theta} d\Omega_l \quad (1.11)$$

В случае кручения сплошных составных стержней будем иметь

$$P_z = 2A \sum_{l=1}^N G_l \int_{\Omega_l} \frac{\Phi^{(l)}}{r^3 \sin^3 \theta} d\Omega_l \quad (1.12)$$

2. Меридиональное сечение в виде кольцевого сектора. Рассмотрим случай кручения сплошного составного стержня, когда контур области Ω_l образуется из координатных линий. Закон упрочнения материала возьмем в виде $f_l(T_l) = 1 + \lambda_l (T_l / 2G_l)^{\nu_l}$, где λ_l и ν_l — положительные физические параметры. Такой закон упрочнения следует из общих соотношений теории пластического течения в случае простого нагружения.

Действительно, если принять в качестве дополнительного соотношения энергетическое условие изотропного упрочнения [11]

$$T = f_*(A_p) \text{ или } A_p = \Phi_*(T) \quad (2.1)$$

где $f_*(A_p)$ и $\Phi_*(T)$ — характерные для данного материала функции, A_p — работа пластической деформации, то согласно этой теории полные приращения компонентов тензора деформации будут

$$d\varepsilon_{jk} = d\varepsilon_{jk}^e + F_*(T) s_{jk} dT \quad (2.2)$$

где $F_*(T) = \Phi_*(T) / 2T^2$, $s_{jk} = \sigma_{jk} - \sigma \delta_{jk}$.

Известно, что функции f_* и Φ_* не зависят от вида напряженного состояния и могут быть определены, например, по кривой рас-

тяжения; тогда $T = \sigma_1 / \sqrt{3}$, а A_p является функцией пластического относительного удлинения ε_1^p .

Примем степенную аппроксимацию

$$\sigma_1 = A_1 (\varepsilon_1^p)^x \quad (2.3)$$

где $A_1, x > 0$ — постоянные.

Тогда

$$A_p = A_1 \int_0^{\varepsilon_1^p} (\varepsilon_1^p)^x d\varepsilon_1^p = \frac{A_1}{x+1} (\varepsilon_1^p)^{x+1} \quad (2.4)$$

Исключая ε_1^p из (2.3) и (2.4), получаем

$$\Phi_*(T) \equiv \lambda_* T^{n^*}, \quad F_*(T) \equiv \frac{1}{2} \lambda_{*1} T^{n^*-3} \quad (2.5)$$

где

$$\lambda_* = \frac{3^{\frac{x+1}{2x}}}{(x+1) A_1^{1/x}}, \quad n^* = \frac{x+1}{x}$$

Подставив (2.5) в (2.2), будем иметь

$$d\varepsilon_{jk} = d\varepsilon_{jk}^e + \frac{1}{2} \lambda_{*1} T^{n^*-3} s_{jk} dT \quad (2.6)$$

ε_{jk} и σ_{jk} в (2.6) содержат некоторый параметр t , нулевое значение которого соответствует началу процесса нагружения. Интегрируя (2.6) по t от 0 до t , имея в виду, что $\varepsilon_{jk} = 0$ и $\sigma_{jk} = 0$, когда $t = 0$, получаем

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^e + \frac{\lambda_{*1} t^{n^*}}{2(n^*-2)} \left(s_{jk} T^{n^*-2} - \int_0^t T^{n^*-2} ds_{jk} \right) \quad (2.7)$$

Допустим, что поверхностные нагрузки p_j , приложенные к телу, как и напряжения σ_{jk} , возрастают пропорционально параметру t

$$p_j = \tilde{t} p_j, \quad \sigma_{jk} = \tilde{t} \sigma_{jk} \quad (2.8)$$

где \tilde{p}_j — заданные функции только координат точек поверхности тела, $\tilde{\sigma}_{jk}$ — функции только координат.

Подставив второе из (2.8) в (2.7), получим

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^e + \lambda \left(\frac{T}{2G} \right)^{n^*} \frac{s_{jk}}{2G} \quad (2.9)$$

где

$$\lambda = \frac{\gamma_* \mu^* (2G)^{\mu^*-1}}{2(\mu^* - 1)}, \quad \nu = \mu^* - 2$$

Пусть при $t=1$ в теле будут напряжения $\tilde{\sigma}_{jk}$ и деформации $\tilde{z}_{jk} = \tilde{z}_{jk}^e + \tilde{z}_{jk}^p$. Эти величины, следовательно, удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил, условиям на поверхности, уравнениям (2.9) и уравнениям неразрывности деформаций, причем последним уравнениям \tilde{z}_{jk}^e и \tilde{z}_{jk}^p удовлетворяют в отдельности.

Если параметру сообщено некоторое значение t , то напряжения $\sigma_{jk} = t\tilde{\sigma}_{jk}$ и соответствующие им деформации $z_{jk} = t\tilde{z}_{jk}^e + t^{\nu+1}\tilde{z}_{jk}^p$, определенные по (2.9), также удовлетворяют вышеуказанным уравнениям.

Отметим, что доказанное справедливо и для сжимаемого и для несжимаемого материалов.

Таким образом, при малых деформациях и при энергетическом условии упрочнения (2.5) реализуется простое нагружение, когда внешние нагрузки P_j возрастают пропорционально параметру t .

При довольно жестких ограничениях, когда материал несжимаемый и интенсивности деформаций сдвига Γ и касательных напряжений T связаны степенной зависимостью $\Gamma = 2\lambda T^\nu$, условие простого нагружения указано А. А. Ильюшиным [11].

В случае неоднородного материала с упрочнениями различных видов λ_i, ν_i (2.9), простое нагружение осуществляется, когда $\nu_i = \nu$. Когда ν_i различны, то простое нагружение имеет место только внутри областей Ω_i в точках, достаточно отдаленных от поверхностей раздела смежных областей.

Решение $\Phi(r, \theta)$ при условии $\Phi = 0$ на $\Gamma\Omega_0$ ищем в виде

$$\Phi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n \Phi_n^{(i)} \quad (2.10)$$

Преобразуя (1.5), подставляя в него разложение (2.1) и вводя новую переменную $\omega = \theta - \pi/2$, приходим к системе рекуррентных граничных задач

$$\frac{\partial^2 \Phi_n^{(i)}}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \Phi_n^{(i)}}{\partial \omega} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(i)}}{\partial \omega^2} = -Q_n^{(i)}$$

когда $(r, \omega) \in \Omega_i - \Gamma\Omega_i$

$\Phi_n^{(i)} = 0$, когда $(r, \omega) \in \Gamma^{(0)}\Omega_0$

$$G_i \lambda_i^n \Phi_n^{(i)} = G_j \lambda_j^n \Phi_n^{(j)}, \text{ когда } (r, \omega) \in \Gamma\Omega_i \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_0^{(l)}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{\Phi}_0^{(l)}}{\partial t}, \text{ когда } (r, \omega) \in \Gamma \Omega_{lj}$$

$$\lambda_l^{n+1} \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}^{(l)}}{\partial t} + \Theta_n^{(l)} \right) = \lambda_l^{n+1} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_{n+1}^{(l)}}{\partial t} + \dot{\Theta}_n^{(l)} \right)$$

когда $(r, \omega) \in \Gamma \Omega_{lj}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

где $Q_0^{(l)} \equiv -1$, а при $n \geq 1$

$$Q_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{n-1} \text{grad } F_k^{(l)} \text{ grad } \Phi_{n-k-1}^{(l)} - \sum_{k=0}^{n-1} \dot{Q}_{n-k-1}^{(l)} F_k^{(l)}$$

При $\nu_l = 2$

$$F_n^{(l)} = \frac{A^2}{r^1 \cos^2 \omega} \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k^{(l)} \text{ grad } \Phi_{n-k}^{(l)}$$

$$\Theta_n^{(l)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(l)} \frac{\partial \Phi_{n-k}^{(l)}}{\partial t}$$

Здесь $\Phi_0^{(l)}$ соответствует линейно-упругому решению.

Можно показать, что задача (2.11) имеет единственное решение и тождественно удовлетворяется условие разрешимости, а соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

3. *Многослойный стержень.* Рассмотрим случай, когда $\Gamma \Omega_l$ образуется из координатных линий $r = r_1$, $r = r_2$ ($r_1 < r_2$), $\omega = \alpha_{l-1}$, $\omega = \alpha_l$.

Решение задачи (2.11) ищем в виде ряда

$$\Phi_n^{(l)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{nk}^{(l)}(\omega) R_k(r) \quad (3.1)$$

где

$$R_k(r) = \frac{\sqrt{2} r^{3/2}}{(\ln r_2/r_1)^{1/2}} \sin \left(s_k \ln \frac{r}{r_1} \right), \quad s_k = \frac{k\pi}{\ln r_2/r_1}$$

— собственные функции задачи (2.11). Тогда для коэффициентов $\Psi_{nk}^{(l)}$ получаем уравнения

$$D^2 \Psi_{nk}^{(l)} + 3 \text{tg } \omega D \Psi_{nk}^{(l)} - \nu_k \Psi_{nk}^{(l)} = - Q_{nk}^{(l)} \quad (3.2)$$

$$\nu_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ln^2 r_2/r_1} + \frac{9}{4}, \quad Q_{nk}^{(l)}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^2} Q_n^{(l)}(\xi, \omega) R_k(\xi) d\xi$$

Общий интеграл уравнения (3.2) будет

$$\Psi_{nk}^{(l)}(\omega) = E_{nk}^{(l)} \cos^2 \omega P_{\nu_k}^2(\sin \omega) + \bar{E}_{nk}^{(l)} \cos^2 \omega Q_{\nu_k}^2(\sin \omega) -$$

$$\begin{aligned}
& -\cos^2 \omega Q_{\nu_k}^2(\sin \omega) \int_{\alpha_{l-1}}^{\omega} \frac{Q_{nk}^{(l)}(\psi) P_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi + \\
& + \cos^2 \omega P_{\nu_k}^2(\sin \omega) \int_{\alpha_{l-1}}^{\omega} \frac{Q_{nk}^{(l)}(\psi) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где

$$U_{\nu_k}(\psi) = P_{\nu_k}^2(\sin \psi) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi) - Q_{\nu_k}^2(\sin \psi) P_{\nu_k}^2(\sin \psi)$$

а $P_{\nu_k}^2$, $P_{\nu_k}^3$, $Q_{\nu_k}^2$ и $Q_{\nu_k}^3$ — присоединенные сферические функции с ин-

дексом $\nu_k = -\frac{1}{2} + k\pi i / \ln \frac{r_2}{r_1}$. Здесь i — мнимая единица.

Разложим $\Theta_n^{(l)}$ в ряд по $R_k(r)$

$$\Theta_n^{(l)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_{nk}^{(l)}(\omega) R_k(r), \quad \Theta_{nk}^{(l)}(\omega) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\xi^4} \Theta_n^{(l)}(\xi, \omega) R_k(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.1) и (3.4) в граничные условия (2.11), получаем систему $2N$ уравнений для определения постоянных интегрирования $E_{nk}^{(l)}$ и $\tilde{E}_{nk}^{(l)}$

$$\begin{aligned}
& E_{nk}^{(1)} P_{\nu_k}^{(2)}(\sin \alpha_0) + \tilde{E}_{nk}^{(1)} Q_{\nu_k}^{(2)}(\sin \alpha_0) = 0 \\
& E_{nk}^{(N)} P_{\nu_k}^2(\sin \alpha_N) + \tilde{E}_{nk}^{(N)} Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha_N) - \\
& - Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha_N) \int_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N} \frac{Q_{nk}^{(N)}(\psi) P_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi + \\
& + P_{\nu_k}^2(\sin \alpha_N) \int_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N} \frac{Q_{nk}^{(N)}(\psi) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi = 0 \\
& E_{nk}^{(l)} \lambda_l^n G_l P_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) + \tilde{E}_{nk}^{(l)} \lambda_l^n G_l Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) - \\
& - \lambda_l^n G_l Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) \int_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{Q_{nk}^{(l)}(\psi) P_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi + \\
& + \lambda_l^n G_l P_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) \int_{\alpha_{l-1}}^{\alpha_l} \frac{Q_{nk}^{(l)}(\psi) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k}(\psi)} d\psi = \\
& = E_{nk}^{(l+1)} \lambda_{l+1}^n G_{l+1} P_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) + \tilde{E}_{nk}^{(l+1)} \lambda_{l+1}^n G_{l+1} Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha_l) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{0k}^{(l)} P_{\nu_k}^* (x_l) + \bar{E}_{0k}^{(l)} Q_{\nu_k}^* (x_l) - E_{0k}^{(l+1)} P_{\nu_k}^* (x_l) - \bar{E}_{0k}^{(l+1)} Q_{\nu_k}^* (x_l) - \\
& - Q_{\nu_k}^* (x_l) Q_{0k}^{(l)} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{P_{\nu_k}^2 (\sin \psi) d\psi}{\cos^2 \psi U_{\nu_k} (\psi)} + P_{\nu_k}^* (x_l) Q_{0k}^{(l)} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{Q_{\nu_k}^2 (\sin \psi) d\psi}{\cos^2 \psi U_{\nu_k} (\psi)} = 0 \\
& E_{n+1, k}^{(l)} \lambda_l^{n+1} P_{\nu_k}^* (x_l) + \bar{E}_{n+1, k}^{(l)} \lambda_l^{n+1} Q_{\nu_k}^* (x_l) - E_{n+1, k}^{(l+1)} \lambda_{l+1}^{n+1} P_{\nu_k}^* (x_l) - \\
& - \bar{E}_{n+1, k}^{(l+1)} \lambda_{l+1}^{n+1} Q_{\nu_k}^* (x_l) + \frac{2\lambda_l^{n+1}}{\nu_k + 2} \Theta_{nk}^{(l)} (x_l) - \frac{2\lambda_{l+1}^{n+1}}{\nu_k + 2} \Theta_{nk}^{(l+1)} (x_l) + \\
& + \lambda_l^{n+1} P_{\nu_k}^* (x_l) \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{Q_{n+1, k}^{(l)} (\psi) Q_{\nu_k}^2 (\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k} (\psi)} d\psi - \\
& - \lambda_l^{n+1} Q_{\nu_k}^* (x_l) \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{Q_{n+1, k}^{(l)} (\psi) P_{\nu_k}^2 (\sin \psi)}{\cos^2 \psi U_{\nu_k} (\psi)} d\psi = 0
\end{aligned}$$

Здесь

$$Q_{0k}^{(l)} = \frac{4\sqrt{2} s_k [(-1)^k \sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}]}{(\ln r_2/r_1)^{1/2} (1 + 4s_k^2)}$$

$$P_{\nu_k}^* (x_l) = 2 \cos x_l P_{\nu_k-1}^2 (\sin x_l) - \sin 2x_l P_{\nu_k}^2 (\sin x_l)$$

$$Q_{\nu_k}^* (x_l) = 2 \cos x_l Q_{\nu_k-1}^2 (\sin x_l) - \sin 2x_l Q_{\nu_k}^2 (\sin x_l)$$

4. *Двухслойный стержень.* Рассмотрим частный случай кручения двухслойного стержня, когда $N = 2$, $\Gamma\Omega_1$ образуется из координатных линий $\omega = x_0 = -\alpha$, $\omega = x_1 = 0$, а $\Gamma\Omega_2$ — из $\omega = x_1 = 0$, $\omega = x_2 = \alpha$ (фиг. 3).

Определив $E_{nk}^{(l)}$ и $\bar{E}_{nk}^{(l)}$ из (3.5), подставив в (3.3), а последнее в (3.1), после некоторых преобразований получим решение задачи (2.11) в виде

$$\Phi_0^{(1)} (r, \omega) = G_2 Q_{0k}^{(2)} \int_0^\alpha G_0^* (\psi; r, \omega) d\psi + Q_{0k}^{(1)} \int_{-\alpha}^0 G_0^{(1)} (\psi; r, \omega) d\psi$$

$$\Phi_0^{(2)} (r, \omega) = -G_1 Q_{0k}^{(1)} \int_{-\alpha}^0 G_0^* (\psi; r, \omega) d\psi + Q_{0k}^{(2)} \int_0^\alpha G_0^{(2)} (\psi; r, \omega) d\psi$$

$$\Phi_{n+1}^{(1,2)} (r, \omega) = G_{2,1} \left(\frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2}} \right)^{n+1} \int_{\Omega_{2,1}} Q_{n+1}^{(2,1)} (\xi, \psi) G^* (\xi, \psi; r, \omega) d\Omega_{2,1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_{1,2}} Q_{n+1}^{(1,2)}(\xi, \psi) G^{(1,2)}(\xi, \psi; r, \omega) d\Omega_{1,2} \pm \\
& \pm G_{2,1} \left(\frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2}} \right)^{n+1} \int_{r_1}^{r_2} \Theta_n^{(2,1)}(\xi, 0) L(\xi; r, \omega) d\xi \mp \\
& \mp G_{2,1} \int_{r_3}^{r_2} \Theta_n^{(1,2)}(\xi, 0) L(\xi; r, \omega) d\xi
\end{aligned}$$

В последнем выражении для $\Phi_{n+1}^{(1)}$ следует взять первые индексы, а для $\Phi_{n+1}^{(2)}$ — вторые.
Здесь

$$G_0^*(\psi; r, \omega) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\nu_k}(\omega, \psi)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(r), & \text{когда } \psi \in [0, \alpha] \\ \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\nu_k}(\psi, \omega)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(r), & \text{когда } \psi \in [-\alpha, 0] \end{cases}$$

$$G_0^{(1)}(\psi; r, \omega) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_k}^{(1)}(\omega, \psi)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(r), & \text{когда } \psi \leq \omega \\ \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_k}^{(1)}(\psi, \omega)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(r), & \text{когда } \psi \geq \omega \end{cases}$$

$$G^*(\xi, \psi; r, \omega) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\nu_k}(\omega, \psi)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } (\xi, \psi) \in \Omega_2 \\ \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{\nu_k}(\psi, \omega)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } (\xi, \psi) \in \Omega_1 \end{cases}$$

$$G^{(1)}(\xi, \psi; r, \omega) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_k}^{(1)}(\omega, \psi)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } \psi \leq \omega \\ \frac{\cos^2 \omega}{\xi^3 \cos^2 \psi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_k}^{(1)}(\psi, \omega)}{K_{\nu_k} U_{\nu_k}(\psi)} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } \psi \geq \omega \end{cases}$$

$$L(\xi; r, \omega) = \begin{cases} \frac{\cos^2 \omega}{\xi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_{\nu_k}(\omega; \alpha)}{(\nu_k + 2)K_{\nu_k}} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } (r, \omega) \in \Omega_1 \\ \frac{\cos^2 \omega}{\xi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_{\nu_k}(\omega; -\alpha)}{(\nu_k + 2)K_{\nu_k}} R_k(\xi) R_k(r), & \text{когда } (r, \omega) \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$K_{\nu_k} = G_2 [Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) - P_{\nu_k-1}^2(0) Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha)] \times \\ \times [Q_{\nu_k}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha)] +$$

$$+ G_1 [P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(0) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha)] \times$$

$$\times [P_{\nu_k-1}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha) - Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \alpha)]$$

$$I_{\nu_k}(\omega, \psi) = [P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k-1}^2(0) - P_{\nu_k-1}^2(0) Q_{\nu_k}^2(0)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) P_{\nu_k}^2(\sin \omega) - P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(\sin \omega)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha) P_{\nu_k}^2(\sin \psi) - P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)]$$

$$J_{\nu_k}^{(1)}(\omega, \psi) = \{G_1 [Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) - Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha) P_{\nu_k-1}^2(0)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \omega) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \omega)] -$$

$$- G_2 [Q_{\nu_k}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \omega) - P_{\nu_k-1}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \omega)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) P_{\nu_k}^2(\sin \psi) - P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)]$$

$$J_{\nu_k}^{(2)}(\omega, \psi) = \{G_1 [P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(0) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \psi) - P_{\nu_k-1}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)] -$$

$$- G_2 [Q_{\nu_k-1}^2(0) P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) - Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) P_{\nu_k-1}^2(0)] \times$$

$$\times [Q_{\nu_k}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \psi) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \psi)] \times$$

$$\times [P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(\sin \omega) - Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha) P_{\nu_k}^2(\sin \omega)]$$

$$Y_{\nu_k}(\omega; \alpha) = [P_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) Q_{\nu_k}^2(\sin \omega) - Q_{\nu_k}^2(-\sin \alpha) P_{\nu_k}^2(\sin \omega)] \times$$

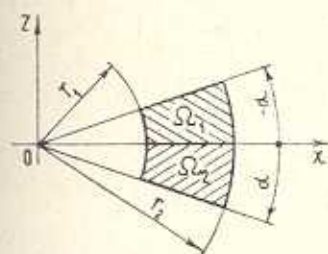
$$\times [Q_{\nu_k}^2(0) P_{\nu_k}^2(\sin \alpha) - P_{\nu_k}^2(0) Q_{\nu_k}^2(\sin \alpha)]$$

Рассматривая сходимость ряда (3.1), заметим, что первое уравнение (2.11) в области Ω_l является равномерно эллиптическим с коэффициентами, принадлежащими пространству C_{α^*} , $\alpha^* \in (0, 1)$. Следовательно, справедливы априорные оценки Шаудера [10]. Область Ω_l и граничные значения $\Phi_n^{(l)}$ гладкие. При этих условиях $\Phi_0^{(l)} \in G_{2+\alpha^*}$, так как $Q_0^{(l)} \in C_{\alpha^*}$, и вообще, из выражения $Q_n^{(l)}$ (2.11) следует, что $Q_n^{(l)} \in C_{\alpha^*}$, следовательно, $\Phi_n^{(l)} \in C_{2+\alpha^*}$.

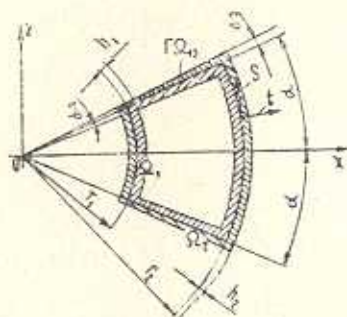
Вводя норму в C_{α^*}

$$\|X\| = \max_{M \in \Omega_l} |X(M)| + \max_{M, V \in \Omega_l} \frac{|X(M) - X(V)|}{MV^{\alpha^*}}$$

и применяя априорные оценки Шаудера $\|D^2\Phi_n^{(l)}\| \leq c^* \|Q_n^{(l)}\|$, где c^* — постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [9], показывается, что ряд (2.10) и ряды, составленные из производных $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^k D\Phi_k^{(l)}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^k D^2\Phi_k^{(l)}$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

5. Тонкостенный стержень с замкнутым профилем. Рассмотрим кручение тонкостенного составного стержня с меридиональным сечением в виде двухсвязной области. Рассмотрим случай двухслойного сечения ($N=2$), когда $\Gamma\Omega_l$ образуется из координатных линий (фиг. 4). Толщина стенки $h_1 + h_2$, ($\alpha_1 r_2 = h_1$, $\alpha_2 r_2 = h_2$). Переходя к координатной системе t, s , где t направлено по внешней нормали, а s — по касательной $\Gamma\Omega_{12}$, из (1.4) получим

$$\tau_t^{(l)} = \frac{2AG_l}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial s}, \quad \tau_s^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t}$$

Преобразуя уравнение (1.5) к координатной системе t, s и в виду малости толщины стенки пренебрегая компонентом напряжения $\tau_t^{(l)}$, для рассматриваемого сечения приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f_l(T_l) \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} \right] = 1, \quad T_l = \frac{2AG_l}{S(s)} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} \quad (5.1)$$

где

$$S(s) = \begin{cases} (r_1 + s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta = \pi/2 + \alpha \\ r_2^2 \sin^2 (\pi/2 + \alpha - s/r_2) & \text{при } r = r_2, \quad \pi/2 - \alpha \leq \theta \leq \pi/2 + \alpha \\ (r_2 - s)^2 \cos^2 \alpha & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta = \pi/2 - \alpha \\ r_1^2 \sin^2 (\pi/2 - \alpha + s/r_1) & \text{при } r = r_1, \quad \pi/2 - \alpha \leq \theta \leq \pi/2 + \alpha \end{cases}$$

В случае линейной упругости из (5.1) получаем

$$\Phi^{(j)} = 1/2 t^2 + K_1^{(j)}(s) t + K_2^{(j)}(s) \quad (5.2)$$

Произвольные функции интегрирования $K_1^{(j)}$ и $K_2^{(j)}$ определяются из граничного условия и из условий (1.6), (1.9). Принимая $\Phi = 0$ на $\Gamma^{(0)}\Omega_0$ и $\Phi = \Phi_1$ на $\Gamma^{(1)}\Omega_0$, получаем

$$K_1^{(j)} = \frac{b - 2G_1\Phi_1}{2b_1}, \quad K_2^{(j)} = \frac{G_2 h_2 (2\Phi_1 - h_1 h_2 - h_1^2)}{2b_1}$$

$$b = G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2, \quad b_1 = G_1 h_1 + G_2 h_2$$

Согласно (1.11) и (5.2) будем иметь

$$\Phi_1 = \frac{P_z + 2AH_1}{2AH_2} \quad (5.3)$$

Здесь

$$H_1 = \frac{G_1 G_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{2b_1} \left[\frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \cos^3 \alpha} + \frac{H(r_1^2 + r_2^2)(h_1 - h_2)}{r_1^2 r_2^2} \right] -$$

$$- \frac{b}{2b_1} \left[\frac{Hb_1(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} + \frac{G_2 \alpha_3^2 - G_1 \alpha_2^2}{\cos^3 \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{(r_1 - r_2)(G_1 \alpha_2^3 + G_2 \alpha_3^3)}{3 \cos^3 \alpha} - 2Hb_1$$

$$H_2 = \frac{2G_1 H(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{G_1 G_2 h_2}{b_1} \left[\frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 \cos^3 \alpha} + \frac{H(r_1^2 + r_2^2)(h_1 - h_2)}{r_1^2 r_2^2} \right] -$$

$$- \frac{G_1}{b_1} \left[\frac{Hb_1(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} + \frac{G_2 \alpha_3^2 - G_1 \alpha_2^2}{\cos^3 \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$H = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} 1/2(\pi/2 + \alpha)}{\operatorname{tg} 1/2(\pi/2 - \alpha)}$$

Подставив (5.3) в (5.2), а (5.2) в (1.10), определим A , а затем и напряжение $\tau_s^{(j)}$

$$A = P_z H^*, \quad \tau_s^{(j)} = \frac{2P_z G_l H^*}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{(1 + 2H^* H_1) G_1}{2H^* H_2 b_1} - \frac{b}{2b_1} - t \right]$$

$$H^* = \frac{G_1 (r_1^2 + r_2^2)}{(r_1^2 + r_2^2)(H_2 b - 2G_1 H_1) + 2H_2 b_1 r_1 r_2 (r_1 - r_2)}$$

Примем степенной закон упрочнения

$$f_l(T_l) = \lambda_l T_l^{\nu_l - 1}, \quad \lambda_l = \lambda_l^* / G_l^{\nu_l - 1}$$

Для простоты вычислений в случае степенного закона упрочнения, ввиду малости толщины стенки, $\Phi^{(l)}$ приближенно можно взять в форме (5.2).

Принимая $\Phi = 0$ на $\Gamma^{(0)} \Omega_0$, $\Phi = \Phi_1$ на $\Gamma^{(1)} \Omega_0$ и используя (1.6), (1.9), определим $K_1^{(l)}(s)$, $K_2^{(l)}(s)$.

В частности, если $\nu_1 = \nu$, то

$$K_1^{(2)} = \frac{b - 2G_1\Phi_1}{2G_2[h_1(G_1\lambda_2/G_2\lambda_1)^{1/\nu} + h_2]}, \quad K_2^{(2)} = -h_2\left(\frac{h_2}{2} + K_1^{(2)}\right) \\ K_1^{(1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/\nu} \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{-1/\nu} K_1^{(2)}, \quad K_2^{(1)} = \frac{G_2}{G_1} K_2^{(2)} \quad (5.4)$$

Отметим, что когда $\nu_1 \neq \nu_2$, то $K_1^{(l)}$ и $K_2^{(l)}$ будут зависеть от s .

Из-за малости толщины стенки, пренебрегая двойными интегралами, из (1.11) находим

$$\Phi_1 = \frac{P_z r_1 r_2}{4AG_1 H(r_2 - r_1)} \quad (5.5)$$

Согласно (5.4), (5.5), (5.2) и (1.10) получаем

$$P_z = \frac{2AHb(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} - \\ \frac{4A^{1/\nu} G_2 H(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} \left[h_1 \left(\frac{G_1 \lambda_2}{G_2 \lambda_1} \right)^{1/\nu} + h_2 \right] \left[\frac{H(r_2 - r_1)}{(2G_2)^{\nu-1} \lambda_2 r_1 r_2 \lambda} \right]^{1/\nu} \quad (5.6)$$

$$\chi = \oint_{\Gamma_{12}^{(0)}} \frac{ds}{S^{\nu+1/2}(s)}, \quad \tau_s^{(l)} = -\frac{2AG_l}{r^2 \sin^2 \theta} (t + K_1^{(l)})$$

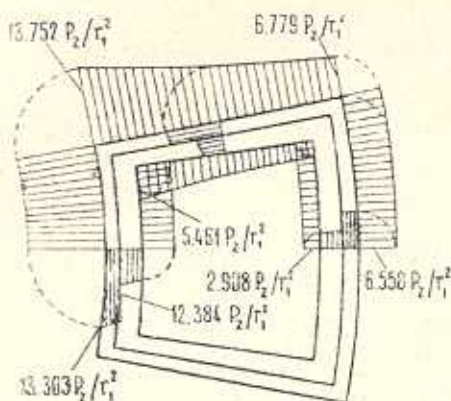
При $\nu = 2$ из (5.6) будем иметь

$$A = \frac{P_z r_1 r_2}{2bH(r_2 - r_1)} + \frac{G_2 H c^2 (r_2 - r_1)}{\lambda_2 r_1 r_2 b^2 \lambda} - \\ - \frac{c}{b^2} \left\{ \left[P_z |b| r_1 r_2 + \frac{G_2 H^2 c^2 (r_2 - r_1)^2}{\lambda_2 r_1 r_2 \lambda} \right] \frac{G_2}{\lambda_2 r_1 r_2 \lambda} \right\}^{1/2} \\ c = h_1 \left(\frac{G_1 \lambda_2}{G_2 \lambda_1} \right)^{1/2} + h_2$$

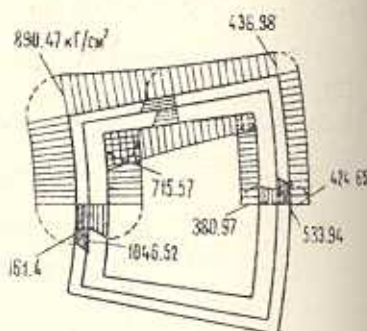
$$\chi = \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4} \right) + \left(\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4} \right) \left(\frac{\sin \alpha}{2 \cos^4 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{4 \cos^2 \alpha} + H \right)$$

На фиг. 5 приведена эпюра распределения напряжений $\tau_{\alpha}^{(1)}$ в сечении в случае линейно-упругого материала. При этом принимается

$$r_2 = 1.4 r_1, h_1 = 0.02 r_1, h_2 = 0.01 r_1, \alpha = 10^\circ \text{ и } G_2 = 2G_1.$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Приведена также эпюра распределения напряжений $\tau_{\alpha}^{(1)}$ (фиг. 6) в случае ² упрочняющегося материала. При этом $r_1 = 15$ см, $r_2 = 1.4 r_1$, $h_1 = 0.02 r_1$, $h_2 = 0.01 r_1$, $\alpha = 10^\circ$, $G_2 = 2G_1$, $G_1 = 0.42 \cdot 10^8$ кг/см², $\nu = 2$, $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $\lambda_2 = 0.031$ см²/кг и $P_2 = 1000$ кг.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 22 VI 1979

Պ. Վ. ԳԱԿՁՅԱՆ

ՏԱՐՔԵՐ ԱՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԿՈՐ ԶՈՎԻ
ՊԼԱՍՏԻԿ ՈՒՐՈՒՄԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Ուսումնասիրվում է շրջանային օղակի սեկտորի տեսքով բաղադրյալ կոր ձողի ուղորումը: Չողը ուղորվում է ծայրային կտրվածքներում ազդող և օղակի առանցքով ուղղված հակադիր ուժերով: Չողի երկարությունը հաստատուն միջօրեականային կտրվածքը կազմավորվում է տարբեր համասեռ և իզոտրոպ նյութերի համապատասխանող տիրույթներից: Յուրաքանչյուր տիրույթում ձողը ենթարկվում է իզոտրոպ ածրապնդման: Ընտրված նյութերի համար ցույց են տրված պարզ բեռնավորման պայմանները:

Խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ մասնակի ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման: Օղակային սեկտորի տեսք ունեցող կտրվածքով բազմաշերտ հոծ ձողի դեպքում համապատասխան եզրային խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ մի որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում է սեկտրենտ եղբային

խնդիրների անվերջ համակարգի կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում լուծումը ներկայացնող շարքի զուգամիտությունը:

Դիտվում է նաև փակ տրամատավորությանը (պրոֆիլով) երկշերտ բարակապատ ձողի ուղորման դեպքը: Ստացված են լուծումներ օղակային սեկտորի տեսք ունեցող տրամատավորության բարակապատ երկշերտ ձողի համար: Այդ դեպքի համար կառուցվել են կտրվածքում լարումների բաշխման էպյուրները:

THE PLASTIC TORSION OF A CURVED BAR, COMPOSED OF DIFFERENT MATERIALS

P. V. GALPCHIAN

S u m m a r y

The torsion of a curved, composite bar in the form of a circular ring sector is considered. The bar is twisted by the opposite forces acting on the end meridional section along the axis of the ring. The meridional section, constant along the length of the bar, is made of some domains, corresponding to different homogeneous isotropic materials. In each domain the material obeys the condition of isotropic strengthening. Simple loading condition's for the chosen materials are shown.

The problem is reduced to the nonlinear partial differential equation relative to the function of stress.

In case of a continuous many-layer bar with cross-section of a circular sector the solution of the boundary problem is sought in the form of a power series by certain physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent boundary problems. The solution of these problems are given and the series convergence is shown.

The case of torsion of a two-layer thinwalled bar of closed profile is also considered. The solutions are given for a profile of circular sector. For this case the epures of stress distribution in the cross-section are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПИММ, 1933, т. 1, вып. 2.
3. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Изв. АН СССР, ОМОН, 1933, № 3.
4. Рухадзе А. К. Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, ограниченных эпитрохидами. Тр. Тбилисского математического института, 1937, т. 1.
5. Шерман Д. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Извеш. сб., АН СССР, 1951, т. 10.

6. Чобанян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 1955, т. 8, № 2.
7. Лехницкий С. Г. Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения. Инжен. сб., АН СССР, 1956, т. 23.
8. Гадпчян П. В., Задоян М. А. Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
9. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца. Известия АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.
11. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
12. Freiburger W. The uniform torsion of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B 1953.
13. Wang A. J., Prager W. Plastic twisting of a circular ring sector. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.