ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 3, 1985 Механика

УДК 539.3 : 678.067

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ТРУБЕ

ДОРОГИНИН В. В.

В настоящей работе для решения задачи о плоской деформации периодически неоднородной по толщине цилиндрически ортотропной трубы применен асимптотический метод осреднений [1, 2], сводящий неоднородную задачу к последовательности задач для однородной анизотропной трубы с эффективными модулями упругости. В отличие от теории эффективного модуля [3], уже нулевое приближение по методу осреднений учитывает локальные напряжения, обусловленные неоднородностью материала. В работе [4] исследована зависимость погрешности нескольких асимптотических приближений от числа слоев и степени неоднородности материала для трубы, нагруженной равномерным внутренним давлением. Ниже аналогичное исследование в нулевом приближении проведено для случая неравномерной нагрузки различной степени локализации.

Малым параметром ε в данной задаче является отношение безразмерной толщины трубы к числу периодов структуры, укладывающихся по толщине трубы. Ограничившись в асимптотических разложениях для напряжений σ_{ij} слагаемыми нулевого порядка по ε, получим нулевое приближение [4]

$$\sigma_{ii}^{(0)}=\sigma_{ii}^{(\text{э})},\quad i=1,\,2$$

$$\sigma_{22}^{(0)}=\frac{C_{1122}\,\sigma_{11}^{(\text{э})}}{C_{1111}}+\frac{\left(D_{1111}\sigma_{22}^{(\text{э})}-D_{1122}\,\sigma_{11}^{(\text{э})}\right)\left(C_{1111}C_{2222}-C_{1122}^{2}\right)}{C_{1111}\left(D_{1111}D_{2222}-D_{1122}^{2}\right)}\tag{1}$$

Здесь индексам 1,2 соответствуют полярные координаты $\alpha_1=r$, $\alpha_2=\theta$, индекс (э) обозначает решение по теории эффективного модуля, C_{ijkl}—модули упругости, D_{ijkl}—эффективные модули упругости [2]. В случае изотропных слоев с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν соотношение (1) упрощается

$$\sigma_{22}^{(0)}=\frac{\mu}{(1-\nu)\left\langle\dfrac{\mu}{1-\nu}\right\rangle}\left(\sigma_{22}^{(\text{э})}-\left\langle\frac{\nu}{1-\nu}\right\rangle\sigma_{11}^{(\text{э})}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_{11}^{(\text{э})}\tag{2}$$

где через $\langle\varphi\rangle$ обозначено какое-либо осреднение периодической функции φ по периоду.

Зависимость погрешности приближенных решений от характера внешней нагрузки исследуем на следующей задаче. Труба с внутренним радиусом a и внешним радиусом b, состоящая из $2M$ периодически чередующихся однородных изотропных склеенных между собой слоев, находится под действием внешней нормальной ступенчатой нагрузки

$$\sigma_{11}|_{r=b}=\begin{cases} p, \text{ если } \beta\leqslant\theta\leqslant\pi-\beta, \quad \pi+\beta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\beta \\ -\left(\dfrac{\pi}{2\beta}-1\right), \text{ если } -\beta<\theta<\beta, \ \pi-\beta<\theta<\pi+\beta \end{cases} \tag{3}$$

Угол β, характеризующий степень неравномерности нагрузки, варьируется от $\pi/4$ до 0.

Решение подобной задачи для однородной ортотропной трубы в рядах Фурье дано в работе [5]. В частности, формулы для кольцевых напряжений имеют вид

$$\sigma_{22}^{(1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki}-1)r^{\alpha_{ki}-2}\cos k\theta \tag{4}$$

Здесь c_{ki} — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, α_{ki} — корни характеристического уравнения

$$\alpha_{k1,2,3,4}=1\pm\sqrt{0{,}5(1+\delta+\gamma k^2)\pm 0{,}5\sqrt{k^4(\gamma^2-4\delta)+2k^2(\gamma^2+2\gamma\delta+4\delta)+(1-\delta)^2}}$$

$$\gamma=2\left(\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle\left\langle\frac{\mu}{1-\nu}\right\rangle-\left\langle\frac{\nu}{1-\nu}\right\rangle\right);\ \delta=\left\langle\frac{\mu}{1-\nu}\right\rangle\left\langle\frac{1-2\nu}{\mu(1-\nu)}\right\rangle+\left\langle\frac{\nu}{1-\nu}\right\rangle^2$$

Поскольку $\gamma>0$, $\delta>0$ и

$$\gamma^2-4\delta=4\left\langle\frac{\mu}{1-\nu}\right\rangle\left\langle\frac{\mu}{(1-\nu)}\left(\frac{1}{\mu}-\left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle\right)^2\right\rangle\geqslant 0$$

то корни характеристического уравнения действительные. Кратные корни могут быть лишь при $k=1$ или $k^2+(\delta-1)^2=0$. Оба эти случая в рассматриваемой задаче невозможны, так как в разложении нагрузки (3) в ряд Фурье отсутствуют слагаемые с $k=0$ или $k=1$

$$\sigma_{11}|_{r=b}=-2\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\sin k\beta\cos k\theta}{k\beta}$$

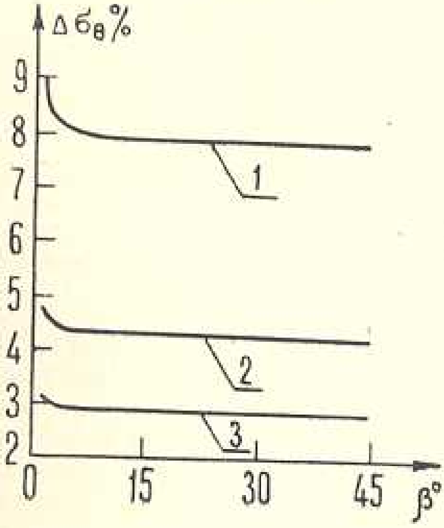
При вычислениях в этом ряду удерживалось 50 членов.

Приближенные решения сравнены с точным, полученным методом начальных параметров [6]. Погрешность оценивалась по норме

$$\Delta\sigma_{\theta}=\max_{r,\theta}\left|\sigma_{22}^{\text{точн}}(r,\theta)-\sigma_{22}^{\text{прибл}}(r,\theta)\right| \Big/ \max_{r,\theta}\left|\sigma_{22}^{\text{точн}}(r,\theta)\right|$$

Для трубы относительной толщины $b/a=1{,}1$, состоящей из стальных и свинцовых слоев ($\mu_1/\mu_2=15$; $\nu_1=0{,}3$; $\nu_2=0{,}446$), погрешность решения по теории эффективного модуля оказалась примерно на порядок больше погрешности нулевого приближения по методу осреднений, составляющей в широком диапазоне изменения параметров β, M 3—9%. Однако, как видно из фигуры, при уменьшении угла β настолько, что участок действия локальной нагрузки сужается до величины, равной 2—3 периодам структуры, погрешность резко возрастает.

Таким образом, нулевое приближение по методу осреднений весьма эффективно для всех нагрузок, кроме сосредоточенных, и тем эффективнее, чем больше слоев в трубе. В случае сосредоточенных нагрузок для применения метода осреднений нужно предварительно выделить особенности решения.



Фиг. 1

Автор благодарен профессору Б. Е. Победре за плодотворные обсуждения работы.

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ. Վ. ԴՈՐՈԳԻՆԻՆ

Ամփոփում

Ըստ շառավղի պարբերաբար անհամասեռ առաձգական խողովակի հարթ դեֆորմացիոն խնդիրը լուծված է միջինացված ասիմպտոտիկ մեթոդով և ճիշտ, սկզբնական պարամետրերի մեթոդով։ Ցույց է տրված, որ միջինացված մեթոդի զրոյական մոտավորությունը տալիս է լավ ճշտություն խնդրի ուժային և երկրաչափական պարամետրերի փոփոխման լայն դիապազոնում։

ON THE DETERMINATION OF STRESSES IN A MULTILAYER ELASTIC TUBE

V. V. DOROGININ

Summary

The plane strain problem has been solved for periodically inhomogeneous along the radius elastic tube both with the asymptotic method

of homogenezation and exactly with the initial parameter method. It has been shown that zero-order approximation render high accuracy in a wide range of change of force and geometric parameters of the problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.—ДАН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516—519.
2. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов.—Вестник МГУ, математика, механика, 1977, № 5, с. 101—110.
3. Механика композиционных материалов.—М.: Мир, 1978, 556 с.
4. *Горбачев В. И.* Об упругом равновесии цилиндрической неоднородной по толщине трубы под действием поверхностных нагрузок и перемещений.—Проблемы прочности, 1979, № 5, с. 79—83.
5. *Дорогинин В. В.* О плоской деформации бесконечной цилиндрической ортотропной трубы.—Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1980, т. 33, № 4, с. 77—79.
6. *Шевляков Ю. А.* Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред.—Киев—Одесса: Вища школа, 1977, 216 с.

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Поступила в редакцию 3.II.1983