ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 3, 1989 Механика

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

МОВСИСЯН Л. А.

Приводятся вязкоупругие соотношения для анизотропных слоистых пластин и оболочек.

Рассматривается частный вид вязкоупругости, когда не все коэффициенты в физических соотношениях элементарного слоя обладают вязкостью.

Изучен ряд примеров. Показано принципиальное отличие получаемых результатов от вариантов сбора пакета. Обсуждаются вопросы оптимального армирования.

1. Многие композиционные материалы, армирующие элементы которых, например, металл или стекло, а связующие полимеры—при невысоких температурах при взаимноортогональном армировании в направлениях армирования, ведут как упругие, а по отношению к касательным напряжениям проявляют свойства ползучести: соотношения напряжения—деформация, записанные в системе координат, связанной с направлениями армирования (плоский случай), имеют вид

$$\sigma_{11}=B^0_{11}e_{11}+B^0_{12}e_{22}-\beta_1 T, \quad \sigma_{22}=B^0_{12}e_{11}+B^0_{22}e_{22}-\beta_2 T \tag{1.1}$$

$$\sigma_{12}=\tilde{B}^0_{66}e_{12}=B^0_{66}(1-\Gamma^*)e_{12}, \quad \Gamma^* u=\int\limits_0^t \Gamma(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Здесь Γ^*—линейный оператор наследственности, постоянные β_i выражаются через коэффициенты линейного расширения в направлениях армирования следующим образом: $\beta_1=B^0_{11}\alpha_1+B^0_{12}\alpha_2$, $\beta_2=B^0_{12}\alpha_1+B^0_{22}\alpha_2$.

Если координатную систему расположить так, чтобы она составила угол $-\varphi$ относительно направлений армирования, то физические соотношения в этой системе будут

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\tilde{B}_{11}e_{xx}+\tilde{B}_{12}e_{yy}+\tilde{B}_{16}e_{xy}-\beta_{11}T\\
\sigma_{yy}&=\tilde{B}_{12}e_{xx}+\tilde{B}_{22}e_{yy}+\tilde{B}_{26}e_{xy}-\beta_{22}T\\
\sigma_{xy}&=\tilde{B}_{16}e_{xx}+\tilde{B}_{26}e_{yy}+\tilde{B}_{66}e_{xy}-\beta_{66}T
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь уже все $\tilde{B}_{ij}$ обладают наследственным свойством: $\tilde{B}_{ij} = B_{ij} - b_{ij}\Gamma^*$, где B_{ij}—упругие части, которые выражаются через B^0_{ij} известным образом [2, 3], b_{ij} имеют вид [4]

$$b_{11} = b_{22} = -b_{12} = B^0_{66}\sin^2 2\varphi, \quad b_{66} = B^0_{66}(1 - \sin^2 2\varphi) \tag{1.3}$$

$$b_{26} = -b_{16} = B^0_{66}\sin 2\varphi\cos 2\varphi$$

а постоянные β_{ij} [1]

$$\beta_{11} = \beta_1\cos^2\varphi + \beta_2\sin^2\varphi, \ \beta_{22} = \beta_1\sin^2\varphi + \beta_2\cos^2\varphi, \ \beta_{66} = (\beta_1 - \beta_2)\sin\varphi\cos\varphi \tag{1.4}$$

Если составить пакет из таких слоев (толщина каждого h) так, чтобы относительно координатной поверхности, находящейся на геометрической середине всего пакета, слои расположились симметрично (φ_k) или асимметрично ($\pm\varphi_k$) и если принять гипотезу прямых нормалей и $T = \theta_1 + z\theta_2$, то тогда соотношения вязкоупругости примут вид

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{16} & 0 & 0 & \tilde{K}_{16} \\ & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{26} & 0 & 0 & \tilde{K}_{26} \\ & & \tilde{C}_{66} & \tilde{K}_{16} & \tilde{K}_{26} & 0 \\ & & & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{16} \\ & & & & \tilde{D}_{22} & \tilde{D}_{26} \\ & & & & & \tilde{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varkappa_{11} \\ \varkappa_{22} \\ \varkappa_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ c_{66} \\ 0 \\ 0 \\ k_{66} \end{bmatrix} \theta_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{66} \\ d_{11} \\ d_{22} \\ d_{66} \end{bmatrix} \theta_2 \tag{1.5}$$

Конечно, для пакета вместо гипотезы недеформируемых нормалей можно было принять более точную теорию (например, [5]), однако для той цели, которую преследует данная рбаота, уточнение несущественно. По этой же причине здесь рассматриваются простые одномерные задачи. Они вызваны лишь для подтверждения того или иного положения.

В зависимости от числа и расположения слоев соотношения и входящие в них коэффициенты будут различными. Их конкретизация приводится ниже.

При четном числе слоев ($2n$) и симметричном их расположении

$$\tilde{C}_{ij} = 2h\sum_{k=1}^{n}\tilde{B}^{(k)}_{ij}$$

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{2h^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k^3 - (k-1)^3\right]\tilde{B}^{(k)}_{ij} \tag{1.6}$$

$$\tilde{K}_{ij} = k_{ij} = 0, \quad \tilde{B}^{(k)}_{ij} = B^{(k)}_{ij} - b^{(k)}_{ij}\Gamma^*$$

В (1.5) маленькими буквами (c_{ii}, d_{ii}, k_{ii}) обозначены величины, которые получатся из выражений $\tilde{C}_{ii}$, $\tilde{D}_{ii}$, $\tilde{K}_{ii}$, если $B^{(k)}_{ii}$ заменить через $\beta^{(k)}_{ii}$ и отбросить члены от ползучести.

При асимметричном расположении слоев помимо $\tilde{C}_{ij}$ и $\tilde{D}_{ij}$ по (1.6)

$$\tilde{C}_{i6} = \tilde{D}_{i6} = 0, \quad i = 1,2, \quad c_{66} = d_{66} = 0$$

$$\tilde{K}_{ij} = h^2 \sum_{k=1}^{n} \left[k^2 - (k-1)^2\right] \bar{B}_{ij}^{(k)} \tag{1.7}$$

Теперь, если число слоев нечетное $(2n+1)$, то при симметричном расположении вместо (1.6) будем иметь

$$\tilde{C}_{ij} = h \left[\tilde{B}_{ij}^{(1)} + 2 \sum_{k=2}^{n+1} \bar{B}_{ij}^{(k)} \right] \tag{1.8}$$

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{h^3}{12} \left\{ \tilde{B}_{ij}^{(1)} + 8 \sum_{k=2}^{n+1} \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(k - \frac{3}{2}\right)^3 \right] \bar{B}_{ij}^{(k)} \right\}$$

При асимметричном расположении в (1.5) все члены уже фигурируют, но, если при $i, j = 1, 2$ и $i = j = 6$ $\tilde{C}_{ij}$ и $\tilde{D}_{ij}$ определяются по (1.8), то

$$\tilde{C}_{i6} = h\bar{B}_{i6}^{(1)}, \quad \tilde{D}_{i6} = \frac{h^2}{12} \tilde{C}_{i6}, \quad i = 1,2$$

$$\tilde{K}_{ij} = h^2 \sum_{k=2}^{n+1} \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \bar{B}_{ij}^{(k)} \tag{1.9}$$

$$c_{66} = hB_{66}^{(1)}, \quad d_{66} = \frac{h^2}{12} c_{66}$$

Как расположить слои? Что лучше—симметричное или асимметричное расположение? На какой угол повернуть каждый слой относительно координатной системы? Все это зависит от конкретной задачи и на какое время предназначена данная конструкция. Ниже приводится ряд простых примеров, подтверждающих сказанное.

2. Рассмотрим несколько примеров одномерных задач.

1. Упругая пластинка-полоса одним концом жестко защемлена $(u = v = w = w' = 0)$, а на другом конце заданы нормальное перемещение $(u = u_0)$, прогиб $(w = w_0)$ и $T_{12} = M_{11} = 0$.

Уравнения, описывающие НДС в перемещениях для симметрично (1.6) и асимметрично (1.7) собранных пластин, будут

$$\left. \begin{aligned} & C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + C_{16} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \\ & C_{16} \frac{d^2 u}{dx^2} + C_{66} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \\ & D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \end{aligned} \right| \qquad \left. \begin{aligned} & C_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \\ & C_{66} \frac{d^2 v}{dx^2} - K_{16} \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \\ & D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} - K_{16} \frac{d^3 v}{dx^3} = 0 \end{aligned} \right|$$

Как здесь, так и в дальнейшем через C_{ij}, D_{ij} и K_{ij} обозначены упругие части соответствующих коэффициентов в (1.6)—(1.9) без учета членов вязкости. Выражения максимальных упругих напряжений соответственно симметричному (1.6) и асимметричному (1.7) случаях для двухслойной пластинки равны

$$\sigma_{\max}^{(c)} = \frac{B_{11} u_0}{l}\left(1 - \frac{B_{16}^2}{B_{11} B_{66}}\right) + hB_{11}\frac{3w_0}{l^2} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\max}^{(a)} = B_{11}\frac{u_0}{l} + B_{11}\frac{3hw_0}{l^2}\left(1 - \frac{B_{16}^2}{B_{11}B_{66}}\right) \tag{2.2}$$

Какое из них лучше (максимальное напряжение меньше)—зависит от величин u_0 и w_0. Если $u_0=0$, то, конечно, лучше асимметричное расположение, а при $\frac{u_0}{w_0} > \frac{3h}{l}$ лучше симметричное.

Следует отметить еще, что если в первом случае растяжение сопровождается кручением, то во втором случае изгиб—кручением.

II. Для композитов одним из главных вопросов, если не самый главный, является вопрос оптимального армирования с целью получения наибольших значений каких-то параметров (критической силы, основной частоты и т. д.). По-видимому, впервые в [6] был поставлен вопрос и решен ряд задач для осесимметричной однослойной цилиндрической оболочки: а именно, при каком расположении главных направлений упругости (фактически армирования) получится, например, максимальная критическая сила. Строго говоря, эти задачи не являются классическими задачами оптимального управления. Они—обычные задачи на максимум. Однако в литературе принято их также называть оптимальными. И здесь оптимальность понимается в этом смысле. Надо однако заметить, что часто ответ на этот вопрос может быть вопреки «очевидному».

Рассмотрим упругую устойчивость четырехслойной пластинки (цилиндрический изгиб), находящейся в постоянном температурном поле θ. Края в продольном направлении неподвижны и шарнирно оперты по отношению вариации перемещений.

Уравнение устойчивости и граничные условия запишутся в виде

$$D_{11}\frac{d^2 w}{dx^2} - T_1^0 w = 0, \quad w = w'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l$$

где сжимающее усилие согласно уравнению $\frac{dT_1^0}{dx} = 0$, (1.5), (1.6) и условиям $u=0$ при $x=0$ и $x=l$ определяется формулой $T_1^0 = -c_{11}\theta^0$.

Для критического значения температуры получится

$$\theta_{\text{кр}}^{(0)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi h}{l}\right)^2 \cdot K, \quad K = \frac{B_{11}^{(1)} + 7B_{11}^{(2)}}{\beta_{11}^{(1)} + \beta_{11}^{(2)}} \tag{2.3}$$

Для материала с данными $B_{11}^0=2B_{22}^0=2B$, $B_{66}^0=2B_{12}^0=0{,}8\,B$, $\alpha_2=2\alpha_1=\alpha$ (конкретные данные несущественны, так как соответствующим образом армированием можно добиться желаемых значений).

Хотя максимальная изгибная жесткость получается при $\varphi_1=\varphi_2=0$, критическая температура максимальной будет при $\varphi_1\approx 31^\circ$ и $\varphi_2\approx 19^\circ$. И K при этом равен $3{,}3\,\alpha^{-1}$, в то время как при $\varphi_1=\varphi_2=0$ $K=2{,}9\alpha^{-1}$.

III. Очевидно, что в зависимости от срока назначения конструкций оптимальное расположение слоев будет различным, то есть то расположение слоев, при котором, например, получается максимальная мгновенная критическая сила, уже для длительной критической силы такое расположение может не быть наилучшим. Это видно и на примере однослойной пластинки, сжатой вдоль конечной стороны. Если взять такие данные $B_{11}^0=1{,}5\,B$, $B_{22}^0=B$, $B_{66}^0=2B_{12}^0=0{,}8\,B$, то при шарнирно опертом случае для мгновенной критической силы максимальное значение достигается при $\varphi\approx 36^\circ$ и оно равно

$$P_{\text{кр}}^{(M)}=1{,}7B\,\frac{\pi^2 h^3}{12\,l^2} \tag{2.4}$$

Если принять, например, что длительный модуль $B_{66}^0(t\to\infty)=0{,}6B$, то длительная критическая сила достигается при $\varphi\approx 22^\circ$ и она равна

$$P_{\text{кр}}^{(g)}=1{,}3B\,\frac{\pi^2 h^3}{12l^2} \tag{2.5}$$

IV. В [6] получены формулы для упругого критического усилия и формы осесимметричной потери устойчивости свободно опертой анизотропной (общий случай) цилиндрической оболочки:

$$p_{\text{кр}}=\frac{2}{A}\,(\sqrt{n}-m)\,,\ \frac{k\pi}{l}=\sqrt[4]{n} \tag{2.6}$$

Для сравнения приведем значения постоянных, входящих в (2.6) для многослойной оболочки при симметричном (1.6) и асимметричном (1.7) расположении слоев

$$m=\frac{3D_{16}(C_{11}C_{26}-C_{12}C_{16})}{4D_{11}(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)R^2}\,,\quad A=\frac{1}{D_{11}} \tag{2.7}$$

$$n=\frac{\Delta}{R^2D_{11}(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)}\,,\qquad \Delta=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16}\\ C_{12} & C_{22} & C_{26}\\ C_{16} & C_{26} & C_{66}\end{vmatrix}$$

$$m=\frac{3K_{16}(C_{11}K_{26}-K_{16}C_{12})}{4R^2C_{11}(D_{11}C_{66}-K_{16}^2)}\,,\quad A=\frac{C_{66}}{D_{11}C_{66}-K_{16}^2} \tag{2.8}$$

$$n=\frac{C_{66}(C_{11}C_{66}-C_{16}^2)}{R^2C_{11}(D_{11}C_{66}-K_{16}^2)}$$

Для длительной устойчивости упругие коэффициенты должны быть заменены на длительные.

Как видно из приведенных формул, вообще различными являются как критические усилия, так и формы потери устойчивости при симметричном и асимметричном расположении слоев.

V. Еще большее отличие различных вариантов слоистости обнаруживается в задачах распространения волн (колебаний).

Уравнения одномерных волн пластин, соответствующие случаям (1.6) и (1.7), имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\tilde{C}_{11}u+\tilde{C}_{16}v\right)=2n\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\tilde{C}_{16}u+\tilde{C}_{26}v\right)=2n\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\tilde{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2n\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.9}$$

$$\tilde{C}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2n\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad \tilde{C}_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2}-\tilde{K}_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=2n\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\tilde{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\tilde{K}_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+2n\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.10}$$

При этом в (1.1) нижний предел интегрирования должен быть заменен на $-\infty$.

Системы эти существенно отличаются. Если, например, в первом случае продольная волна вызывает кручение, то во втором случае кручение вызывает волна изгиба и наоборот, или, если в первом случае волна кручения распространяется без дисперсии, то во втором — помимо изгибных волн и волна кручения является дисперсионной и т. д.

А вообще, при (1.9) получаемая система не распадается и любая из волн вызывает остальные и все они распространяются с дисперсией.

Для примера рассмотрим распространение продольных и крутящих волн в (2.9) и (2.10) (без изгибных). Если решение искать обычным образом в виде бегущих волн, то при малом затухании для скоростей распространения из (2.9) получим

$$c_1=\sqrt{\frac{K_1}{n\rho}}\left(1-\frac{X_1}{K_1}\Gamma_c\right),\quad c_2=\sqrt{\frac{K_2}{n\rho}}\left(1-\frac{X_2}{K_2}\Gamma_c\right) \tag{2.11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_1=\overline{B}_{11}+\frac{\overline{B}_{16}}{\overline{B}_{11}-\overline{B}_{66}},\quad K_2=\overline{B}_{66}-\frac{\overline{B}_{16}}{\overline{B}_{11}-\overline{B}_{66}}$$

$$X_1=\frac{1}{2}(\overline{B}_{11}+X),\quad X_2=\frac{1}{2}(\overline{B}_{66}-X)$$

$$X=\frac{2\overline{B}_{16}\,\overline{b}_{16}(\overline{B}_{11}-\overline{B}_{66})-\overline{B}_{16}^2(\overline{b}_{11}-\overline{b}_{66})}{(\overline{B}_{11}-\overline{B}_{66})^2}$$

$$\overline{B}_{ij} = 2h \sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}, \quad \overline{b}_{ij} = 2h \sum_{k=1}^{n} b_{ij}^{(k)}$$

Γ_c и Γ_s—с точностью до множителя косинус и синус есть преобразования Фурье от функции $\Gamma(t)$.

Коэффициенты, характеризующие затухания волн, будут

$$k_1 = -\omega\sqrt{\rho n}\,\frac{\Gamma_s}{2} X_1 K^{-3/2}, \quad k_2 = -\omega\sqrt{\rho n}\,\frac{\Gamma_s}{2} X_2 K_5^{-3/2} \tag{2.12}$$

Для сравнения приведены эти же величины при асимметричном пакете (2.10):

$$c = \sqrt{\frac{\overline{B}_{11}}{\rho n}}\left(1 - \frac{\overline{b}_{11}}{2\overline{B}_{11}}\Gamma_c\right), \quad k = -\omega\sqrt{\rho n}\,\frac{\Gamma_s}{2}\overline{B}_{11}^{-3/2} \tag{2.13}$$

Выражения (2.11), (2.12) и (2.13) отличаются не только качественно.

В вышеприведенных примерах, где проводилось сравнение между различными способами составления пакета (симметричный или асимметричный) пластины и оболочки, видно, насколько отличаются напряженно-деформированные состояния друг от друга. На это обстоятельство необходимо обратить внимание, так как существует ряд работ, где для асимметрично собранных пакетов (упругая задача) члены K_{ij} без обоснования опускаются, без упоминания. И для всего пакета получается ложная ортотропия. Конечно, возможны задачи, когда B_{i6} очень малы (на сколько ?), что в результате какие-то параметры будут мало отличаться с учетом или без учета K_{ij}. Но, во-первых, надо показать, когда это имеет место и, во-вторых, следует помнить, что качественные картины будут совершенно различными.

SOME PROBLEMS OF VICSOELASTIC ANISOTROPIC LAMINATED PLATE AND SHELL

L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված են անիզոտրոպ շերտավոր սալերի և թաղանթների համար առաձգամածուցիկ առնչությունները, երբ յուրաքանչյուր շերտ օժտված է շոշափող լարումների նկատմամբ ժառանգական հատկություններով։ Շերտերի գլխավոր ուղղությունները կոորդինատական մակերևույթի նկատմամբ դասավորված են սիմետրիկ կամ ոչ սիմետրիկ։

Դիտարկված են մի շարք խնդիրներ ծռման, կայունության ու ալիքների վերաբերյալ։ Ցույց է տրված տարբեր ձևերով դասավորվածությունից կախված լարվածային-դեֆորմացված վիճակների խիստ տարբերությունը։

Քննարկված են օպտիմալ ամրանավորման հարցերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Л. А.* К расчету анизотропной цилиндрической оболочки вращения.—Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., 1959, т. XII, № 4, с. 89—107.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: Изд-во Гостехтеориздат, 1957, 463 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек.—М.: Физматгиз, 1961, 384 с.
4. *Мовсисян Л. А.* К устойчивости наследственно-упругой анизотропной цилиндрической оболочки.—Материалы II Всесоюзной н.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность», Изд. ЕГУ, 1984, т. II, с. 194—197.
5. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1982, 334 с.
6. *Мовсисян Л. А.* Об осесимметрично-нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке.—Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., 1962, т. XV, № 2, с. 111—119.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.XI.1987