

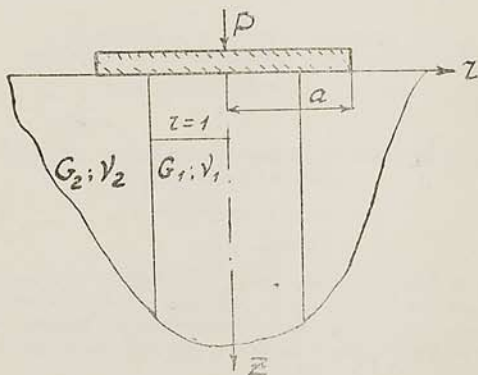
УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
 СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

ПАПОЯН С. О.

Исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен цилиндр из другого материала. На общей торцевой плоскости действует жесткий штамп. Решение задачи сведено к интегральному уравнению, затем—к квазиволне регулярной системе.

В работе исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен упругий цилиндр из другого материала. Контактные задачи для упругого полупространства с выемкой рассмотрены в работах [1—4]. Задача решается при помощи функции напряжений и сводится к интегральному уравнению, а затем—к квазиволне регулярной системе.



Фиг. 1.

Упругое полупространство имеет полубесконечную цилиндрическую выемку радиусом $r=1$, в которую вложен упругий полубесконечный цилиндр из другого материала с радиусом $r=1$. Цилиндр по боковой поверхности полностью сцеплен с полупространством (фиг. 1).

На граничной поверхности составного полупространства действует гладкий жесткий круглый штамп, радиус которого больше радиуса выемки $a > 1$, то есть линия раздела материалов останется под штампом. На плоской граничной поверхности полупространства вне штампа заданы нормальные напряжения. Трение между штампом и полупространством отсутствует. Упругий цилиндр имеет механические постоянные G_1, ν_1 , а полупространство с выемкой — G_2, ν_2 .

Граничные условия и условия контакта имеют вид:

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (0 < r < 1) \quad (1)$$

$$U_z^{(1)}(r, 0) = c \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (2)$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (1 < r < \infty) \quad (3)$$

$$U_z^{(1)}(r, 0) = c \quad (1 \leq r \leq a); \quad \sigma_z^{(2)}(r, 0) = \tau(r) \quad (a < r < \infty) \quad (4)$$

$$U_r^{(1)}(1, z) = U_r^{(2)}(1, z); \quad U_z^{(1)}(1, z) = U_z^{(2)}(1, z) \quad (0 < z < \infty) \quad (5)$$

$$\sigma_r^{(1)}(1, z) = \sigma_r^{(2)}(1, z); \quad \tau_{rz}^{(1)}(1, z) = \tau_{rz}^{(2)}(1, z)$$

Бигармоническую функцию напряжений для полубесконечного цилиндра удобно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, z) = & E_0 z^3 + \\ & + \int_0^\infty [C_1(\mu) J_0(\mu r) + D_1(\mu) \cdot \mu r I_1(\mu r)] \sin \mu z d\mu \end{aligned} \quad (6)$$

(0 <= 1 <= 1); (0 <= z <= \infty)

а для полупространства с цилиндрической выемкой — в виде [2]

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, z) = & \int_0^\infty [A(\mu) + \mu z B(\mu)] e^{-\mu z} W_0(\mu r) d\mu + \\ & + \int_0^\infty [C_2(\mu) K_0(\mu r) + D_2(\mu) \mu r K_1(\mu r)] \sin \mu z d\mu \end{aligned} \quad (7)$$

(1 <= r <= \infty); (0 <= z <= \infty)

где $W_n(\mu r) = J_n(\mu r) Y_1(\mu) - Y_n(\mu r) I_1(\mu)$, а $J_n(x)$; $Y_n(x)$, $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — функции Бесселя [5]

Пользуясь известными формулами [1], выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений, и удовлетворяя усилиям (2) и (3), получим

$$E_0 = G_1 c / (1 - 2\nu_1); \quad A(\mu) = 2\nu_2 B(\mu) \quad (8)$$

а условие (1) удовлетворяется тождественно.

Удовлетворяя контактными условиям (5), для определения неизвестных функций $C_i(\beta)$ и $D_i(\beta)$ ($i=1, 2$) получаем следующую систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
 & C_1(\beta)I_1(\beta) + D_1(\beta) \cdot \beta I_0(\beta) + G[C_2(\beta)K_1(\beta) + D_2(\beta) \cdot \beta K_0(\beta)] = 0 \\
 & C_1(\beta)I_0(\beta) + D_1(\beta)[4(1-\nu_1)I_0(\beta) + \beta I_1(\beta)] - \\
 & - G\{C_2(\beta)K_0(\beta) - D_2(\beta)[4(1-\nu_2)K_0(\beta) - \beta K_1(\beta)]\} = F_1(\beta) \\
 & C_1(\beta)I_1(\beta) + D_1(\beta)[2(1-\nu_1)I_1(\beta) + \beta I_0(\beta)] + \\
 & + C_2(\beta)K_1(\beta) - D_2(\beta)[2(1-\nu_2)K_1(\beta) - \beta K_0(\beta)] = 0 \\
 & C_1(\beta) \left[I_0(\beta) - \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right] + D_1(\beta)[(1-2\nu_1)I_0(\beta) + \beta I_1(\beta)] - \\
 & - C_2(\beta) \left[K_0(\beta) + \frac{K_1(\beta)}{\beta} \right] + D_2(\beta)[(1-2\nu_2)K_0(\beta) - \beta K_1(\beta)] = F_2(\beta)
 \end{aligned} \tag{9}$$

здесь $F_i(\beta)$ ($i=1, 2$) определяются формулами:

$$F_1(\beta) = GF_2(\beta) - \frac{8G}{\pi^2 \beta^3} \int_0^\infty \frac{\mu B^*(\mu) d\mu}{\mu^2 + \beta^2}, \tag{10}$$

$$F_2(\beta) = \frac{8}{\pi^2 \beta} \int_0^\infty \frac{\mu B^*(\mu) d\mu}{(\mu^2 + \beta^2)^2}; \quad G = G_1/G_2;$$

а $B^*(\mu) = \mu^2 B(\mu);$ (11)

Таким образом, все неизвестные, входящие в (6) и (7), выражаются через $B^*(\mu)$ (11).

Удовлетворяя теперь смешанным условиям (4), имея в виду (8), для определения $B^*(\mu)$ получим следующие парные интегральные уравнения, содержащие функцию Вебера [2—3]:

$$\int_0^\infty B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = -\frac{G_2 c}{1-\nu_2} \quad (1 \leq r \leq a) \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \mu B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = \varphi(r) - M(r) \quad (a < r < \infty)$$

где

$$\begin{aligned}
 M(r) = \int_0^\infty \beta^2 \{ & C_2(\beta)K_0(\beta r) - D_2(\beta)[2(2-\nu_2)K_0(\beta r) - \\
 & - \beta r K_1(\beta r)] \} d\beta
 \end{aligned} \tag{13}$$

Дополним первое уравнение (12) на интервале ($r > a$) при помощи неизвестной функции $f(r)$:

$$\int_0^{\infty} B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = \begin{cases} -\frac{Gc}{1-\nu_2} & (1 \leq r \leq a) \\ -\frac{G}{1-\nu_2} f(r) & (a \leq r < \infty) \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда при помощи формул интегрального преобразования Вебера-Орра для $B^*(\mu)$ получим

$$B^*(\mu) = -\frac{G_2}{1-\nu_2} \frac{caW_1(\mu a)}{\Delta(\mu)} - \frac{G_2}{1-\nu_2} \cdot \frac{\mu}{\Delta(\mu)} \int_a^{\infty} r f(r) W_0(\mu r) dr \quad (15)$$

где

$$\Delta(\mu) = Y_1^2(\mu) + J_1^2(\mu) \quad (16)$$

Подставляя $B^*(\mu)$ (15) во второе уравнение (12), имея в виду (8)–(11) и (13), после ряда преобразований для определения $S(t)$, связанной с $f(r)$ формулой

$$S(t) = t \int_a^t \frac{f'(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (17)$$

получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода [2, 3, 4]:

$$S(x) + c = \Phi(x) + \int_a^{\infty} S(t) K(t, x) dt \quad (a < x < \infty) \quad (18)$$

Ядро и свободный член этого уравнения имеют вид

$$K(t, x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} + \frac{1}{\mu K_1^2(\mu) \Delta_1(\mu)} \left[\omega_1(\mu x) \left(1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)} \right) - 2G(1-\nu_2)\omega_2(\mu x) \right] \right] e^{-\mu(t+x)} d\mu \quad (19)$$

$$\Phi(x) = -\frac{1-\nu_2}{G_2} \int_x^{\infty} \frac{r \varphi(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr$$

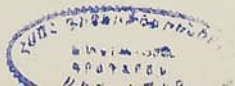
В (19) введены обозначения:

$$\omega_1(\mu x) = \omega_0(\mu x) [E(\mu) - GN(\mu)] + 2(1-\nu_1)2(1-\nu_2) \times \\ \times [x_1(\mu) - x_2(\mu) - 1/\mu] G$$

$$\omega_2(\mu x) = \omega_0(\mu x) N(\mu) + 2(1-\nu_1) [P(\mu) + (1-\mu x)Q(\mu)]$$

$$\omega_0(\mu x) = (1-G) [1 - \mu x + \mu x_2(\mu)] - 2(1-\nu_2)G$$

$$\Delta_1(\mu) = (1-G)^2 \cdot N(\mu) \cdot L(\mu) + 2(1-\nu_1)2(1-\nu_2)GQ^2(\mu) +$$



$$+2(1-\nu_1)(1-G)L(\mu)[2z_1(\mu)-1/\mu]+2(1-\nu_2)(1-G)GN(\mu) \times \quad (20)$$

$$\times [2z_2(\mu)+1/\mu];$$

$$z_1(\mu) = \frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)}; \quad z_2(\mu) = \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}; \quad z_3(\mu) = \mu[1-z_1(\mu) \cdot z_2(\mu)],$$

$$N(\mu) = \mu[1-z_1^2(\mu)] + \frac{2(1-\nu_1)}{\mu}; \quad P(\mu) = z_3(\mu) + \frac{2(1-\nu_1)}{\mu},$$

$$L(\mu) = \mu[1-z_1^2(\mu)] + \frac{2(1-\nu_2)}{\mu}; \quad Q(\mu) = z_1(\mu) + z_2(\mu);$$

$$E(\mu) = \mu[1-z_1^2(\mu)] + 4(1-\nu_1)z_1(\mu);$$

При получении уравнения (18) были использованы следующие формулы [4,6]:

$$\int_x^{\infty} \frac{r W_0(\mu r)}{\sqrt{r^2-x^2}} dr = \frac{\cos \mu x Y_1(\mu) - \sin \mu x J_1(\mu)}{\mu};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu |\cos \beta x Y_1(\beta) - \sin \beta x J_1(\beta)|}{\Delta(\beta)(\mu^2 + \beta^2)} d\beta = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{e^{-\mu x}}{K_1(\mu)}; \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{T(\mu x) T(\mu t)}{\Delta(\mu)} d\mu = \frac{\pi}{2} [\zeta(t-x) + \zeta(t+x)] -$$

$$- \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} e^{-\mu(t+x)} d\mu;$$

где

$$T(\mu x) = \cos \mu x Y_1(\mu) - \sin \mu x J_1(\mu). \quad (22)$$

Для сведения интегрального уравнения (18) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений представим функцию $S(x)$ в виде ряда по многочленам Лежандра:

$$S(x) + c = 1/x \sum_{m=1}^{\infty} X_m P_{2m-1}(a/x). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (18) и используя ортогональность функций Лежандра для неизвестных коэффициентов X_n , получим бесконечную систему

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{m,n} + b_n \quad (n=1;2;3;\dots) \quad (24)$$

где

$$A_{m,n} = \frac{1}{(4m-1)a} \int_a^\infty \Pi_n(x) dx \int_a^\infty \Pi_m(t) [xt \cdot k(t,x)]''_{x,t} dt$$

$$b_n = \int_a^\infty \Pi_n(x) [x\Phi^*(x)]'_x dx$$

$$\Pi_n(x) = P_{2n}(a/x) - P_{2(n-1)}(a/x) \quad (25)$$

$$\Phi^*(x) = \Phi(x) - c \int_0^\infty \frac{J_1(\mu)}{K_1(\mu)} -$$

$$- \frac{1}{\mu K_1'(\mu) \Delta(\mu)} [\mu(a - \nu_2(\mu)) \omega_1(\mu, x) + 2(1 - \nu_2) G \omega_2(\mu, x)] \left\{ \frac{e^{-\mu(a+x)}}{\mu} d\mu \right.$$

Учитывая оценки для многочленов Лежандра (6)

$$\left| P_n(x) \right| \leq \left(\frac{2}{n\pi \cdot (1-x^2)} \right)^{1/2}, \quad |x| < 1 \quad (26)$$

и поведения функций $K(t, x)$ и $\Phi(x)$ показывается, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы убывает

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| A_{m,n} \right| \rightarrow \frac{A_0}{n^{1/2}},$$

а свободный член имеет порядок $O(1/n^{3/2})$.

Отсюда следует, что сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечной системы (24) при возрастании номера n стремятся к нулю не медленнее, чем $n^{-1/2}$. Следовательно, система (24) квазирегулярна.

Равнодействующая контактных напряжений P определяется из условия

$$\int_0^1 \sigma_z^{(1)}(r, 0) r dr + \int_1^a \sigma_z^{(2)}(r, 0) \cdot r \cdot dr = \frac{P}{2\pi}$$

которая также показывает связь между силой P и вертикальным перемещением штампа s , которое фигурирует во всех полученных выражениях.

THE OXISIMMETRICAL CONTACT PROBLEM FOR AN COMPOSITE HALFE SPEASE

S. H. PAPOYAN

ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ
ԿԻՍԱՍԱՐԱՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ս. 2. ՊԱՊՈՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է գլանային խոռոչ ունեցող կիսատարածության կոն-տակտային խնդիրը, երբ խոռոչի մեջ դրված է ուրիշ նյութից պատրաստված գլան, իսկ ընդհանուր ճակատային հարթության վրա գործում է կոշտ դր-րոշմը: Խնդրի լուծումը բերված է ինտեգրալ հավասարման, այնուհետև բվադիլիոսկին սեղուլյար համակարգի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Некоторые осесимметричные задачи для полу-пространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1969 г., т. 22, № 2, с. 3—13.
2. Макарян В. С., Папоян С. О. Об одной контактной задаче для упругого полу-пространства с полубесконечной цилиндрической выемкой.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1980 г., т. 33, № 1, с. 3—11.
3. Папоян С. О. Осесимметричная контактная задача для составного упругого слоя.— В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела, вып. 2.—Ере-ван: Изд-во АН АрмССР, 1983, с. 120—128.
4. Папоян С. О. Осесимметричная контактная задача для составного полупростран-ства с полубесконечным разрезом на контактной поверхности.—В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1986, с. 144—150.
5. Бейтман Т., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1977, 295 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведе-ний.—М.: Наука, 1971. 1108 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.X.1992