ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 56, №2, 2003 Механика

УДК 539.3

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Даноян З.Н.

Զ.Ն. Դանոյան
Անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրում կետային աղբյուրից տարածվող մագնիսաառաձգական ալիքների հարթ խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկված է հարթ խնդրում չորս առաձգական հաստատուններ ունեցող անիզոտրոպ իդեալական հաղորդիչ միջավայրում ակնթարթային իմպուլսի տիպի կետային աղբյուրից տարածվող մագնիսաառաձգական ալիքների հարթ խնդիրը, երբ միջավայրը գտնվում է արտաքին համասեռ հաստատուն մագնիսական դաշտում: Խնդրի լուծումները կառուցված են Սմիռնովի-Սոբոլևի կոմպլեքս լուծումների մեթոդով: Գտնված են պայմաններ առաձգական հաստատունների և մագնիսական դաշտի ինտենսիվության միջև, երբ ալիքները տարածվում են որոշակի բնութագրիչ օրինաչափությամբ: Մասնավորապես գտնված են պայմաններ, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ալիքների ճակատների երկրաչափական ձևը և ալիքային դաշտերում լակունաների առկայությունը:

Z.N. Danoyan
On the Plane Problem of Magnetoelastic Waves Propagation from A Point Source in an Anisotropic Perfect Conducting Media

Рассмотрена плоская задача распространения магнитоупругих волн от точечного источника типа мгновенного импульса в анизотропной идеально-проводящей среде с четырьмя упругими постоянными в плоской задаче, находящейся во внешнем однородном постоянном магнитном поле. Решения задачи строятся методом комплексных решений Смирнова-Соболева. Найдены условия между упругими постоянными и интенсивностью магнитного поля, когда волны распространяются с определенной характеристической закономерностью. В частности, найдены условия, с помощью которых можно определить геометрическую форму фронтов волн и наличия лакун в волновых полях.

Введение. Волновые процессы в анизотропных упругих средах и, тем более, магнитоупругие волновые процессы сложны и многообразны, зависят от класса анизотропии, соотношений упругих постоянных, величины и направления внешнего магнитного поля, направлений распространения волн и т.д. В отличие от изотропных сред, где распространяются чисто продольные и чисто поперечные волны, в анизотропных средах, а также изотропных и анизотропных средах в магнитном поле распространяются квазипродольные и квазипоперечные или быстрые и медленные волны. В изотропных средах волновой процесс был описан функционально-инвариантными или комплексными решениями волновых уравнений [1]. В работах [2-4] методом комплексных решений исследованы волновые процессы в анизотропных средах, причем в [4] предлагается уточняющий подход к построению комплексных решений. В работах [5,6] методом комплексных решений изучены волновые процессы в изотропных средах, находящихся в магнитном поле. В работах [7,8] этим методом изучено поведение магнитоупругих волн в идеально-проводящих анизотропных средах. В этой работе продолжается изучение данного вопроса. Детально изучаются решения, соответствующие магнитоупругим волнам от точечного источника типа мгновенного импульса. Исследованы геометрические формы волновых фронтов и условия возникновения лакун в волновых полях. В работах [9,11] изучены поведения магнитоупругих волн при наличии сосредоточенных сил и импульсов в упругом полупространстве.

1.Уравнения магнитоупругих волн и их решение методом комплексных решений Смирнова-Соболева. Рассмотрим анизотропную идеально проводящую среду, уравнения движения которой в случае плоской деформации содержат четыре упругих постоянных [5]. Оси x, y, z прямоугольной системы координат совпадают с главными направлениями упругости среды. Перемещения не зависят от координаты z. Среда находится в однородном постоянном магнитном поле $\overrightarrow{H_0}$, направленное по одной из координатных осей. Уравнения движения этих сред в перемещениях имеют вид [8]:

$$
\begin{aligned}
&a_m u_{xx} + c_m \mathrm{v}_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt} \\
&e_m \mathrm{v}_{xx} + c_m u_{xy} + b_m \mathrm{v}_{yy} = \mathrm{v}_{tt}
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

где $u = f(x,y,t), \mathrm{v} = g(x,y,t)$ – компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, \mathrm{v}, 0\}$, индексы у u и v обозначают производные по x, y и t; a_m, b_m, c_m, d_m, e_m – постоянные коэффициенты, определяемые формулами ($m = 0, 1, 2, 3$ соответствуют случаям: $\overrightarrow{H_0} = 0$, $\overrightarrow{H_0} = H_0\vec{i}$, $\overrightarrow{H_0} = H_0\vec{j}$, $\overrightarrow{H_0} = H_0\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты координатной системы $Oxyz$):

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_0,\ b_1 = b_0 + \chi,\ d_1 = d_0,\ e_1 = d_0 + \chi,\ c_1 = c_0 \\
&a_2 = a_0 + \chi,\ b_2 = b_0,\ d_2 = d_0 + \chi,\ e_2 = d_0,\ c_2 = c_0 \\
&a_3 = a_0 + \chi,\ b_3 = b_0 + \chi,\ d_3 = d_0,\ e_3 = d_0,\ c_3 = c_0 + \chi \\
&a_0 = c_{11}/\rho_0,\ b_0 = c_{22}/\rho_0,\ d_0 = c_{66}/\rho_0,\ c_0 = (c_{12} + c_{66})/\rho_0
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

c_{ij} – упругие постоянные, ρ_0 – плотность среды, $\chi = H_0^2/4\pi\rho_0$ – величина, характеризующая интенсивность внешнего магнитного поля, называемая скоростью Альфвена.

Область допустимых значений параметров a_0, b_0, c_0, d_0, т.е. коэффициентов уравнений (1.1) при $m = 0$ (при отсутствии магнитного поля) находятся из условия положительной определенности формы упругой энергии [3]:

$$a_0 > 0,\ b_0 > 0,\ d_0 > 0,\ E_0 = a_0 b_0 - (c_0 - d_0)^2 > 0 \qquad (1.3)$$

При этих условиях система (1.1) (при $m=0$) вполне гиперболична, что означает возможность распространения чисто упругих волн в любых направлениях в рассматриваемых средах.

Можно показать [8], что при условиях (1.3) и $\chi>0$ (что имеет место при наличии магнитного поля любой интенсивности) система уравнений магнитоупругих волн вполне гиперболична и магнитоупругие волны в рассматриваемых средах могут распространяться в любых направлениях, причем

$$a_m>0,\ b_m>0,\ d_m>0,\ e_m>0,\ |c_m|<c_E^{(m)} \tag{1.4}$$

$$c_E^{(m)}=\sqrt{a_m b_m}+\sqrt{d_m e_m},\quad m=0,1,2,3 \tag{1.5}$$

Ввиду того, что упругие постоянные реальных известных сред рассматриваемого класса удовлетворяют условиям [3]:

$$a_0>d_0,\ b_0>d_0,\ c_0>0,\ d_0>0,\ E_0>0 \tag{1.6}$$

или, что то же самое,

$$A_0=a_0-d_0>0,\ B_0=b_0-d_0>0,\ d_0>0,\ 0<c_0<c_E^{(0)} \tag{1.7}$$

в работах [2-4] поведение упругих волн исследуются именно при этих условиях. В этой работе мы также будем исходить из неравенств (1.6) и $\chi>0$.

Согласно методу комплексных решений Смирнова-Соболева [1] выражаем решение системы уравнений (1.1) функциями:

$$u=f(\Omega),\ \mathrm{v}=g(\Omega) \tag{1.8}$$

где Ω представляет собой функцию, определенную в неявном виде линейным уравнением относительно x, y, t:

$$\delta\equiv l(\Omega)t+m(\Omega)x+n(\Omega)y-k(\Omega)=0 \tag{1.9}$$

Здесь под f и g понимаются дважды непрерывно-дифференцируемые функции, если величины $l(\Omega),\dots,k(\Omega)$ вещественны. А если некоторые из этих величин комплексны, то f и g — аналитические функции в соответствующей области.

Определяя производные функций (1.8) с учетом (1.9) и подставляя их значения в систему (1.1), получим соотношения:

$$\begin{aligned}&(a_m m^2+d_m n^2-l^2)f'(\Omega)+c_m mn\,g'(\Omega)=0\\&c_m mn\,f'(\Omega)+(e_m m^2+b_m n^2-l^2)g'(\Omega)=0\end{aligned} \tag{1.10}$$

устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями (1.8).

Система (1.10) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\Delta\equiv(a_m m^2+d_m n^2-l^2)(e_m m^2+b_m n^2-l^2)-c_m^2 m^2 n^2=0 \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) устанавливает зависимость между функциями $l(\Omega)$, $m(\Omega)$, $n(\Omega)$, а также, согласно (1.10), между производными $f'(\Omega)$, $g'(\Omega)$.

Таким образом, класс функций (1.8) выражают решение системы (1.1), если их аргумент Ω определен уравнением (1.9), с коэффициентами, подчиненными уравнениям (1.10).

2. Решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника. Из класса функционально-инвариантных решений можно отделить решения, выражающие магнитоупругие волны от точечного источника типа мгновенного импульса в начале координат. Эти решения будут однородными решениями нулевого измерения. Для этого примем в уравнении (1.9) $l(\Omega)=1, n(\Omega)=\lambda, k(\Omega)=0, m(\Omega)=-\theta$. В этом случае уравнения (1.9), (1.10) и (1.11) примут вид:

$$t-\theta x+\lambda y=0 \tag{2.1}$$

$$\begin{cases}(a_m\theta^2+d_m\lambda^2-1)f'(\theta)-c_m\theta\lambda\, g'(\theta)=0\\ -c_m\theta\lambda\, f'(\theta)+(e_m\theta^2+b_m\lambda^2-1)g'(\theta)=0\end{cases} \tag{2.2}$$

$$b_m d_m\lambda^4-p_m(\theta)\lambda^2+r_m(\theta)=0 \tag{2.3}$$

$$p_m=b_m+d_m-(a_m b_m+d_m e_m-c_m^2)\theta^2,\ r_m=(a_m\theta^2-1)(e_m\theta^2-1) \tag{2.4}$$

$$q_m=p_m^2-4b_m d_m r_m=D_m\theta^4-2M_m\theta^2+B_m^2,\ D_m=l_m^2-4a_m b_m d_m e_m \tag{2.5}$$

$$M_m=(b_m+d_m)N_m-(a_m d_m-b_m e_m)B_m,\ l_m=a_m b_m+d_m e_m-c_m^2 \tag{2.6}$$

$$A_m=a_m-e_m,\ B_m=b_m-d_m,\ N_m=A_m B_m-c_m^2 \tag{2.7}$$

В этом случае уравнение (2.1) определяет новую переменную величину θ как функцию от x,y,t, а уравнение (2.3) определяет λ как функцию от θ:

$$\lambda=\pm\lambda_k(\theta)=\pm\sqrt{\frac{p_m(\theta)+(-1)^k\sqrt{q_m(\theta)}}{2b_m d_m}}\quad (k=1,2),\ \lambda_3=-\lambda_1,\ \lambda_4=-\lambda_2 \tag{2.8}$$

функции $\lambda_k(\theta)$ являются ветвями алгебраической функции $\lambda=\lambda(\theta)$, однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных и интенсивности магнитного поля (параметра χ).

Решения (1.8) системы (1.1) принимают вид:

$$u_k=f_k(\Omega_k),\ v_k=g_k(\Omega_k) \tag{2.9}$$

где θ_k определяются, согласно (2.1), из уравнения:

$$1-\theta_k\xi+\lambda_k\eta=0 \tag{2.10}$$

а производные искомых функций, согласно (2.3), из уравнений:

$$\begin{aligned}&(a_m\theta_k^2+d_m\lambda_k^2-1)f_k'(\theta_k)-c_m\theta_k\lambda_k g_k'(\theta_k)=0\\ &-c_m\theta_k\lambda_k f_k'(\theta_k)+(e_m\theta_k^2+b_m\lambda_k^2-1)g_k'(\theta_k)=0\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для получения решения, соответствующего физическому смыслу задачи, необходимо просуммировать условия (2.11) [4]:

$$(a_m\theta_k^2 + d_m\lambda_k^2 - c_m\theta_k\lambda_k - 1)f_k'(\theta_k) +$$
$$+(e_m\theta_k^2 + b_m\lambda_k^2 - c_m\theta_k\lambda_k - 1)g_k'(\theta_k) = 0 \qquad (2.12)$$

Согласно (2.12), решения (2.9) можно представить в виде:

$$u(x,y,t) = -\sum_{k=1}^{4}\mathrm{Re}\{\int^{\theta_k}[e_m\varsigma^2 + b_m\lambda_k^2 - 1 - c_m\varsigma\lambda_k]W_k(\varsigma)d\varsigma\}$$
$$\mathrm{v}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Re}\{\int^{\theta_k}[a_m\varsigma^2 + d_m\lambda_k^2 - 1 - c_m\varsigma\lambda_k]W_k(\varsigma)d\varsigma\} \qquad (2.13)$$

где W_k – ветви произвольной аналитической функции W, однозначно определенной на вышеуказанной римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$.

Равенство (2.10) устанавливает соответствие между вышеуказанной римановой поверхностью и областью на плоскости $O\xi\eta$ (следовательно, и на плоскости Oxy), где определены функции $\theta_k(\xi,\eta)$.

Из вышеизложенного следует, что для построения решения, характеризующего распространения волн от точечного источника, необходимо исследовать алгебраическую функцию $\lambda(\theta)$, ветви этой функции и соответствующую риманову поверхность. Для чисто упругой задачи этот вопрос детально изучен в [2-4], а для магнитоупругих волн – в [8].

Для изучения поведения корней $\lambda_k(\theta)$ следует изучать поведение функций $p(\theta)$, $q(\theta)$ и $r(\theta)$ из (2.5). Корни дискриминанта характеристического уравнения (2.3) определяют особые точки алгебраической функции $\lambda(\theta)$:

$$\Phi_m(\theta) = 16a_m d_m r_m(\theta) q_m(\theta) = 0 \qquad (2.14)$$

что эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$r_m(\theta) = 0,\ q_m(\theta) = 0 \qquad (2.15)$$

Корни функций $p(\theta)$, $q(\theta)$ и $r(\theta)$ определяются выражениями:

$$\theta = \pm\theta_p^{(m)} = \pm\sqrt{\frac{b_m + d_m}{a_m b_m + d_m e_m - c_m^2}} \qquad (2.16)$$

$$\theta = \pm\theta_{r1}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{a_m},\ \ \theta = \pm\theta_{r2}^{(m)} = \pm 1/\sqrt{e_m} \qquad (2.17)$$

$$\theta = \pm\theta_{qk}^{(m)} = \pm\sqrt{\frac{M_m + (-1)^k\sqrt{\Delta_m}}{D_m}},\ \ (k = 1,2) \qquad (2.18)$$

$$\Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4b_m d_m c_m^2 N_m \qquad (2.19)$$

Характер и взаимоположение этих корней в зависимости от упругих постоянных и от χ детально изучен в [8].

Так как точки $\pm\theta_{qk}^{(m)}$ (k = 1,2) суть простые нули функции $q_m(\theta)$ (за исключением случая, когда $N_m = 0$), то внутренний радикал, входящий в

(2.8), будет однозначной функцией на плоскости θ с разрезами, соединяющими точки разветвления $\pm\theta_{qk}^{(m)}$. Эти разрезы таковы:

$$
\begin{aligned}
&1)\ N_m > 0: (\pm\theta_{q1}^{(m)}, \mp\theta_{q1}^{(m)});\ (\pm\theta_{q2}^{(m)}, \mp\theta_{q2}^{(m)})\\
&2)\ N_m < 0, D_m > 0, M_m < 0: (i\left|\theta_{q2}^{(m)}\right|, i\left|\theta_{q1}^{(m)}\right|);\ (-i\left|\theta_{q1}^{(m)}\right|, -i\left|\theta_{q2}^{(m)}\right|)\\
&3)\ N_m < 0, D_m > 0, M_m > 0: (\theta_{q1}^{(m)}, \theta_{q2}^{(m)});\ (-\theta_{q2}^{(m)}, -\theta_{q1}^{(m)})\\
&4)\ N_m < 0, D_m < 0: (\theta_{q1}^{(m)}, +\infty);\ (-\infty, -\theta_{q1}^{(m)})\\
&\quad (i\left|\theta_{q2}^{(m)}\right|, +i\infty);\ (-i\infty, -i\left|\theta_{q2}^{(m)}\right|)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

В случае $N_m = 0$ имеют место равенства $\pm\theta_{q1}^{(m)} = \pm\theta_{q2}^{(m)}$, и поэтому двойные нули $\pm\theta_{qk}^{(m)}$ не являются точками разветвления для внутреннего радикала функций $\lambda_\kappa(\theta)$, т.е. при $N_m = 0$ внутренний радикал функций $\lambda_\kappa(\theta)$ является однозначной функцией на всей комплексной плоскости θ. Случай $N_m = 0$ имеет место, например, для изотропной среды при отсутствии магнитного поля. В этом случае:

$$\theta_{q1}^{(0)} = \theta_{q2}^{(0)} = +\infty,\ \lambda_1(\theta) = \sqrt{1/a_0 - \theta^2},\ \lambda_2(\theta) = \sqrt{1/d_0 - \theta^2}$$

В общем случае значение внутреннего радикала функций $\lambda_\kappa(\theta)$ будем фиксировать условием: он положителен при $\theta = ib$, где b достаточно малая положительная величина.

Взяв два листа плоскости θ с вышеуказанными разрезами и склеив крест-накрест соответствующие берега разрезов, получим риманову поверхность однозначного определения функции $T(\theta)$:

$$T(\theta) = (2b_m d_m)^{-1}[p_m(\theta) + \sqrt{q_m(\theta)}] \tag{2.21}$$

находящейся под внешним радикалом функции $\lambda(\theta)$. Ветви функции $T(\theta)$ определены на плоскостях θ_1 и θ_2 и имеют вид:

$$T_k(\theta) = (2b_m d_m)^{-1}[p_m(\theta) + (-1)^k \sqrt{q_m(\theta)}] \tag{2.22}$$

Теперь рассмотрим поведение радикала $\lambda(\theta) = \sqrt{T(\theta)}$ на двулистной римановой поверхности алгебраической функции $T(\theta)$. Функция $T(\theta)$ обращается в ноль в четырех точках, которые являются корнями уравнения $r_m(\theta) = 0$, т.е. в точках $\pm\theta_{rk}^{(m)} (k = 1,2)$. При вышеуказанном выборе ветвей $T_k(\theta)$, согласно результатам работы [8, табл.1] следует, что в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ с точки зрения обращения в ноль функций $T_k(\theta)$, возможны следующие случаи:

1) При условии $K_m>0$, $A_m>0$, $S_m>0$ функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в

точках $\pm\theta_{r1}^{(m)}$ плоскости θ_1 римановой поверхности функции $T(\theta)$, а $T_2(\theta)$ — в точках $\pm\theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_2;

2) При условии $K_m<0$, $A_m>0$, $S_m>0$ функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в точках $\pm\theta_{r1}^{(m)}$ и $\pm\theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_1 римановой поверхности, а $T_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль;

3) При условии $K_m<0$, $A_m=0$, $S_m>0$ имеет место $\theta_{r1}^{(m)}=\theta_{r2}^{(m)}$ и функция $T_1(\theta)$ обращается в ноль в двух двойных точках $\pm\theta_{r1}^{(m)}=\pm\theta_{r2}^{(m)}$ плоскости θ_1, а $T_2(\theta)$ нигде не обращается в ноль;

4) При $K_m<0$, $A_m<0$, $S_m>0$ функции $T_k(\theta)$ ведут себя так же, как в случае 2), но здесь взаиморасположение нулей функции $T_1(\theta)$ на плоскости θ_1 меняется на противоположные;

5) При $K_m<0$, $A_m<0$, $S_m<0$ функции $T_k(\theta)$ ведут себя так же, как в случае 1), но здесь взаиморасположение точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное, причем $T_1(\theta_{r2}^{(m)})=0, T_2(\theta_{r1}^{(m)})=0$;

6) Случай $K_m=0$ является переходным между случаями 1) и 2), случай же $S_m=0$ — между случаями 4) и 5).

Отсюда следует, что в случаях 1) и 5) точки $\pm\theta_{rk}^{(m)}$ являются точками разветвления первого порядка функции $\lambda(\theta)$, причем в случае 1) две из них, а именно, точки $\pm\theta_{r1}^{(m)}$ являются точками разветвления для ветви $\lambda_1(\theta)=\sqrt{T_1(\theta)}$ этой функции, а другие две, т.е. точки $\pm\theta_{r2}^{(m)}$, являются точками разветвления для ветви $\lambda_2(\theta)=\sqrt{T_2(\theta)}$ этой функции. В случае 5) роль точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное. В случаях 2) и 4) опять же точки $\pm\theta_{rk}^{(m)}$ являются точками разветвления первого порядка для функции $\lambda(\theta)$, но в этих случаях все четыре особые точки являются точками разветвления для $\lambda_1(\theta)$; ветвь $\lambda_2(\theta)$ точек разветвления не имеет.

Заметим,что в случае 4) по сравнению со случаем 2) взаиморасполо-жением точек $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$ меняется на обратное. В случае 3) точки $\pm\theta_{rk}^{(m)}$ не являются точками разветвления для функции $\lambda(\theta)$. Этот случай (конической рефракции) является особым и требует дополнительных иследований.

На основе вышеприведенных рассуждений приходим к заключению, что радикал $\lambda(\theta)=\sqrt{T(\theta)}$ на римановой поверхности функции $T(\theta)$ будет однозначным, если на этой поверхности провести следующие разрезы:

—При условии 1) на плоскости θ_1 разрез: $(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 — разрез: $(-\theta_{r2}^{(m)}, +\theta_{r2}^{(m)})$ (фиг.1 а, б, в, г);

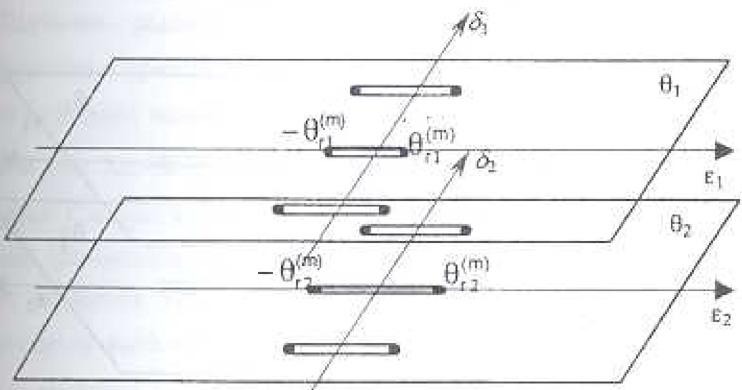
— При условии 2) и $D_m>0$, $M_m>0$ на плоскости θ_1 разрезы:

$(\mp\infty, \mp\theta_{q2}^{(m)})$, $(\mp\theta_{q1}^{(m)}, \mp\theta_{r2}^{(m)})$, $(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 – разрезы: $(\mp\infty, \mp\theta_{q2}^{(m)})$, $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$, (фиг.2);

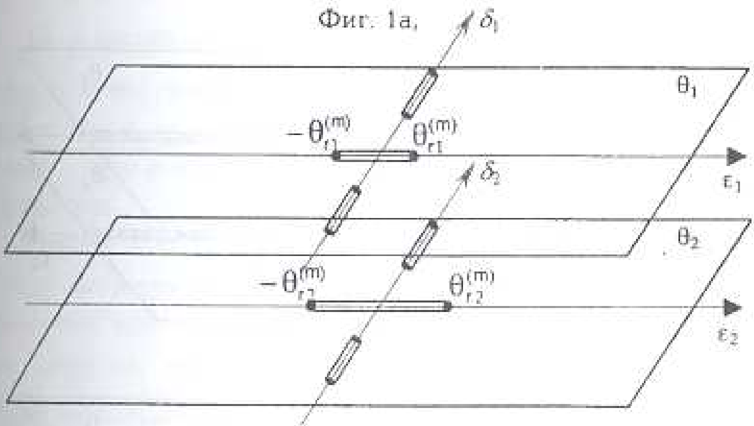
–При условии 2) и $D_m<0$ на плоскости θ_1 разрезы: $(\mp\theta_{q1}^{(m)}, \mp\theta_{r2}^{(m)})$,

$(-\theta_{r1}^{(m)}, +\theta_{r1}^{(m)})$, а на θ_2 – разрез: $(-\theta_{q1}^{(m)}, +\theta_{q1}^{(m)})$, (фиг.3).

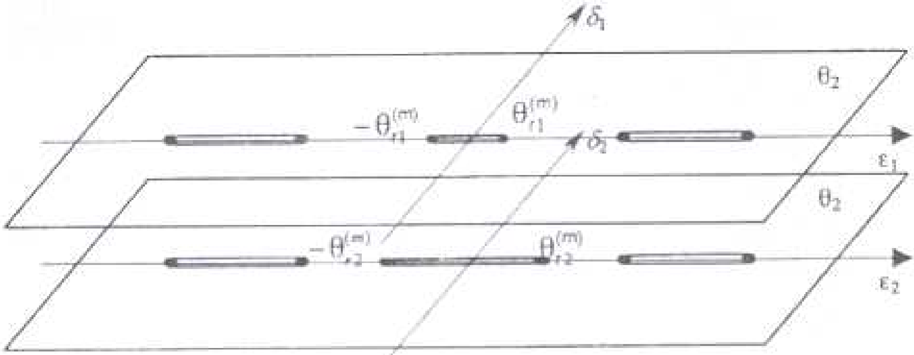
Случай 4) аналогичен случаю 2). Здесь взаиморасположение точек противоположно. Случай же 5) аналогичен случаю 1). В случае $S_m = 0$ или $K_m = 0$ являются предельными для вышеприведенных случаев.



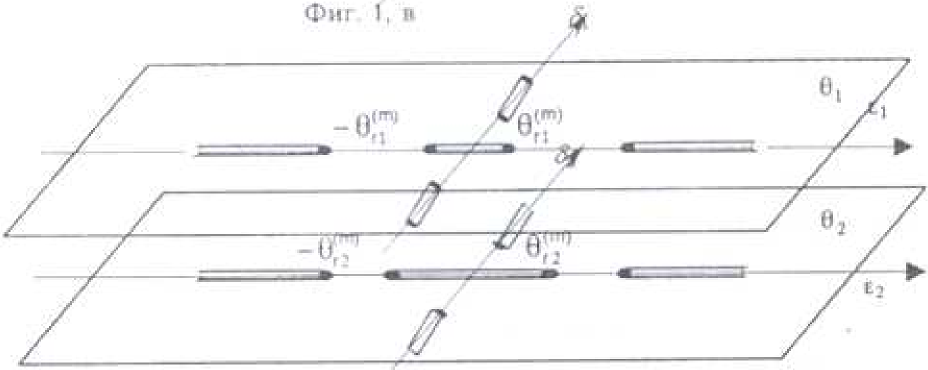
Фиг. 1а,



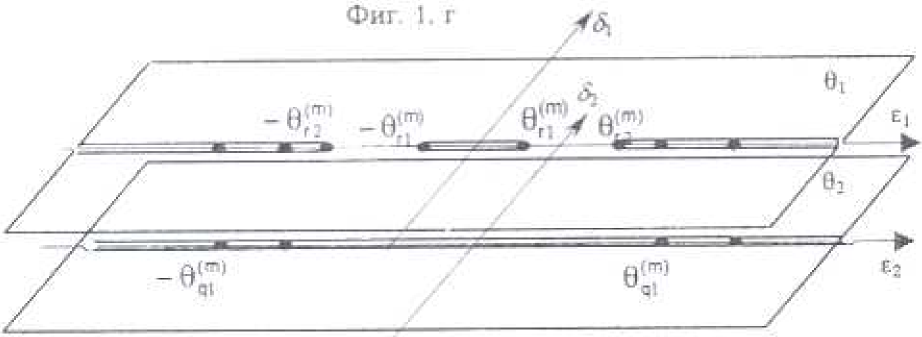
Фиг. 1, б



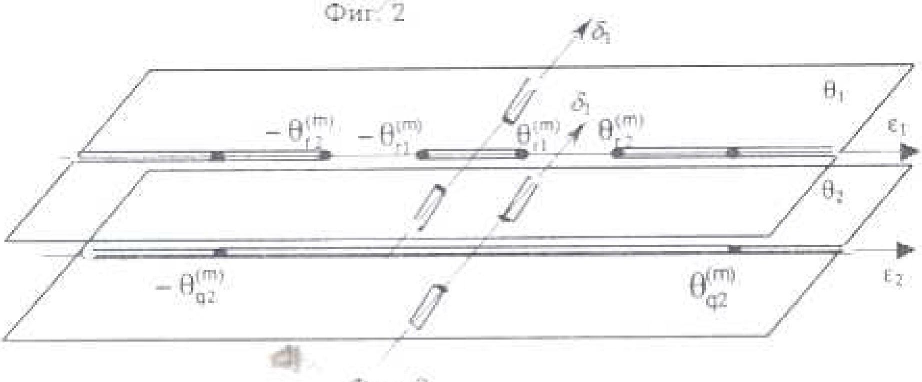
Фиг. 1, в



Фиг. 1, г



Фиг. 2



Фиг. 3

Для получения римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$ следует брать два комплекта двулистной римановой поверхности функции $T(\theta)$ с одинаковыми разрезами, и склеить соответствующие берега этих разрезов, где функции λ_1 и $-\lambda_1$, λ_2 и $-\lambda_2$ принимают одинаковые значения, склеить друг с другом (берега разрезов двулистных поверхностней склеиваются крест-накрест). Ввиду сопряженности рассматриваемых функций относительно вещественных осей, решения можно найти, ограничиваясь рассмотрением двулистной римановой поверхности функции $T(\theta)$.

Значение радикала $\lambda(\theta)=\sqrt{T(\theta)}$ на вышеуказанной римановой поверхности с приведенными разрезами будем фиксировать условием так, чтобы оно было положительным при $\theta_1 = ib_1$, где точка ib_1 принадлежит мнимой оси плоскости θ_1, причем b_1 — достаточно малая положительная величина. Следует отметить, что в случае, когда корни $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения принадлежат первому типу [8], вышеприведенный выбор значения радикала $\lambda(\theta)$ на римановой поверхности равносилен следующему выбору: значение радикалов $\lambda_k(\theta)$ фиксируются условием, чтобы они были положительными при $\theta_1 = ib_1$ и $\theta_2 = ib_2$, где точки ib_1 и ib_2 (b_k — достаточно малые положительные величины) принадлежат соответственно плоскостям θ_1 и θ_2; если же корни $\lambda_k(\theta)$ принадлежат второму типу, то вышеуказанные выборы уже не равносильны (в этих случаях аналитические продолжения приводят к неодинаковым результатам).

Легко показать, что при вышеуказанном выборе ветвей $\lambda_k(\theta)$ каждая из них на противоположных берегах разрезов, где они вещественны, принимают противоположные значения. Отсюда следует, что на берегах этих разрезов ветви $\lambda_k(\theta)$ принимают все значения действительных корней характеристического уравнения ($\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$).

Магнитоупругие возмущения, исходящие из точки $x=0$, $y=0$ в момент времени $t=0$, будут в любой последующий момент времени $t>0$ находиться в плоскости Oxy внутри фронтов магнитоупругой волны, отделяющей возмущенную область от невозмущенной в момент времени t. В любой момент времени t фронт волны может быть получен как огибающая прямых (2.10) при вещественных значениях θ_k и $\pm\lambda_k(\theta_k)$.

Согласно вышеуказанному выбору ветвей $\lambda_k(\theta)$ фронт волны можно получить, как огибающую прямых (2.10) при $k=1$ и $k=2$, причем параметр θ должен меняться на обоих берегах разрезов:

$$\xi_k = -\frac{\lambda_k'(\theta)}{\lambda_k(\theta)-\theta_k\lambda_k'(\theta)},\ \eta_k = -\frac{1}{\lambda_k(\theta)-\theta_k\lambda_k'(\theta)} \qquad (2.23)$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что решение системы (1.1), характеризующее волновые поля магнитоупругих волн, испущенных из точечного источника типа мгновенного импульса, имеет вид [6]:

$$u(x,y,t) = -\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Re}\{\int^{\theta_k}[e_m\varsigma^2 + b_m\lambda_k^2 - 1 - c_m\varsigma\lambda_k]W_k(\varsigma)d\varsigma\}$$

$$v(x,y,t) = \sum_{k=1}^{2}\mathrm{Re}\{\int^{\theta_k}[a_m\varsigma^2 + d_m\lambda_k^2 - 1 - c_m\varsigma\lambda_k]W_k(\varsigma)d\varsigma\} \qquad (2.24)$$

где функцию W необходимо выбрать так, чтобы вещественные части ее ветвей W_k обращались в ноль на берегах разрезов римановой поверхности, где функции $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ вещественны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. Некоторые вопросы распространения колебаний. – В кн. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.– М.-Л.: ОНТИ, 1937, с. 468-617.
2. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела. //ПММ. 1961. Т.25. Вып. 5. С.885-896.
3. Осипов И.О. К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анзотропных сред. // Изв. АН СССР, сер геофиз. 1963. №3. С. 391-396.
4. Осипов И.О. К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анзотропных сред. // Изв. РАН. МТТ. 1999. №4. С.102-112.
5. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т. 27. №5. С. 37-46.
6. Даноян З.Н. К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1975. Т. 28. №1. С. 20-33.

7. Даноян З.Н. О распространении магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах с кубической симметрией.— В кн.: Исследования по мех. тв. деф. тела. Ереван: Изд. АН Арм.ССР. 1981. С. 104-109.
8. Даноян З.Н. К методу функционально-инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеально-проводящих анизотропных сред. // Механика, уч. записки ЕГУ. 1984. №1. С. 52-61.
9. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С.13-23.
10. Григорян Э.Х. О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С. 48-62.
11. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Плоская магнитоупругая задача Лэмба. — Механика, межвуз. сб. науч. трудов, вып.3, Ереван. 1984. С. 68-76.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
09.06.2003