ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Геворкян Г.З., Киракосян Р.М.

Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Հետևելով [1] աշխատանքին, դուրս են բերվել փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի շարժման հավասարումները և ձևակերպվել համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանները ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների հաշվառմամբ: Որպես օրինակ դիտարկվել է սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը, երբ արհամարհվում են միջին հարթության տանգենցիալ տեղափոխությունները և պտտման իներցիան: Սեփական հաճախությունների մոտավոր որոշման համար առաջարկված է Ռիտցի մեթոդի սխեմա, որտեղ վիրտուալ ճկվածքների վրա լայնական ֆիկտիվ բեռի կատարած աշխատանքի հետ մեկտեղ դիտարկվում է նաև ֆիկտիվ կտրող ուժերի կատարած աշխատանքը սահքի համապատասխան վիրտուալ դեֆորմացիաների վրա: Այդ սխեմայի օգնությամբ լուծված է գծայնորեն փոփոխվող հաստության սալ-շերտի ազատ տատանումների խնդիրը՝ եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Սեփական առաջին երկու հաճախությունների համար ստացված մոտավոր արժեքները համեմատվել են հայտնի ճշգրիտ արժեքների հետ: Արվել են եզրակացություններ կիրառված մոտավոր մեթոդի ճշտության վերաբերյալ՝ կախված վիրտուալ ճկվածքների և նրանց համապատասխանող ընդլայնական սահքի ձևերի քանակից:

G.Z. Gevorgyan, R.M. Kirakosyan

On Free Transversal Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness with taking into Account the Transversal Shears

По аналогии с [1] выводятся уравнения движения прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины и формулируются соответствующие начальные и краевые условия при учете влияния деформаций поперечных сдвигов. В качестве примера рассматривается задача свободных поперечных колебаний пластин при пренебрежении тангенциальных перемещений срединной плоскости и инерции вращения. Для приближенного определения собственных частот пластинки предлагается схема применения метода Ритца, где наряду с работой фиктивной поперечной нагрузки на виртуальных прогибах рассматривается также работа фиктивных перерезывающих сил на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов. По этой схеме решается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертой пластинки-полосы линейно-переменной толщины. Полученные приближенные значения первых двух собственных частот сравниваются с соответствующими известными точными значениями. Делаются заключения о точности применяемого приближенного метода в зависимости от числа выбранных форм виртуальных прогибов и соответствующих им деформаций поперечных сдвигов.

1. Рассмотрим пластинку переменной толщины h, изготовленную из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Пластинку отнесем к системе декартовых координат x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xy совместим с срединой плоскостью пластинки, а ось z направим вертикально вниз. Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивности которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной

плоскости, составляют $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$. Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «−» будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям пластинки $z = h/2$ и $z = -h/2$ соответственно. Условия опирания краев пластинки произвольны.

По аналогии с [2] для поперечных касательных напряжений положим

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \qquad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i — искомые функции только координат x, y.

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\sigma y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (x, y, z) \tag{1.2}$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \ldots$ — напряжения, $u_x, \ldots$ — перемещения, ρ — плотность материала, t — время, а символ (x, y, z) означает круговую перестановку букв. Ограничиваясь линейностью распределения перемещений по толщине пластинки, можно написать:

$$u_x = u - z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1\right), \; u_y = \mathrm{v} - z\left(\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1\right), \; u_z = w \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w — перемещения срединной плоскости пластинки, a_{ij} - упругие постоянные материала. Компоненты деформации и основных напряжений пластинки определяются с учетом (1.3) из геометрически линейных соотношений и соотношений обобщеного закона Гука [1] соответственно. Выражения этих величин, а также внутренних усилий и моментов пластинки совпадают со своими статическими аналогами, в силу чего здесь их приводить не будем. Если считать, что окружающая среда не оказывает сопротивления на движение пластинки, то со своими статическими аналогами будут совпадать также и условия на лицевых поверхностях пластинки $z = \pm h/2$ [2].

Имея в виду вышесказанное и поступая как обычно, из дифференциальных уравнений движения сплошной среды (1.1) приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = -X_2 + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = -Y_2 + \rho h \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x - hX_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y - hY_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - a_{44}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $T_x, T_y, S_{xy}, N_x, N_y$ и M_x, M_y, M_{xy} — внутренние усилия и моменты пластинки,

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \; Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2, \; X_2 = X^+ + X^-$$

$$Y_2 = Y^+ + Y^-,\ Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{1.5}$$

Из условий на лицевых поверхностях пластинки $z = h/2$ для функций φ_2, ψ_2, и φ_3, ψ_3 получаются известные выражения [2].

Используя формулы внутренних усилий и моментов и имея в виду выражения функций $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$, из уравнений (1.4) получим систему движения дифференциального элемента срединной плоскости:

$$h\left[B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} +$$
$$+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -X_2$$

$$h\left[B_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} + (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right] + \left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y} +$$
$$+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} - \rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} = -Y_2$$

$$h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial h^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] -$$
$$- h\left\{\left[8 + a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left[8 + a_{44}h\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right\} -$$
$$- 2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) - 16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right) + \tag{1.6}$$
$$+ \rho h\left\{12\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + h\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2} - a_{44}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]\right\} =$$
$$= 4\left[3Z_2 + h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) - X_1\frac{\partial h}{\partial x} - Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$

$$h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right] + 2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] -$$
$$- h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right) + a_{44}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\partial y}\right] -$$
$$- 2h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) + a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\right] +$$
$$+ 8\varphi_1 - \rho h^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) = 8X_1$$

$$h^2\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)+a_{55}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+8\psi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial w^3}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)=8Y_1$$

К уравнениям движения пластинки (1.6) нужно присоединить граничные и начальные условия. При отсутствии сопротивления среды граничные условия совпадают со своими статическими аналогами [2]. Начальные же условия можно представить в виде [1]:

$$\text{при } t=0 \quad u=u_0(x,y),\ \ \mathrm{v}=\mathrm{v}_0(x,y),\ \ w=w_0(x,y)$$

$$\partial u/\partial t=u_1(x,y),\ \partial\mathrm{v}/\partial t=\mathrm{v}_1(x,y),\ \partial w/\partial t=w_1(x,y) \tag{1.7}$$

Здесь u_0,v_0,w_0 и u_1,v_1,w_1 – заданные компоненты начального перемещения и начальной скорости точек срединной плоскости пластинки соответственно.

2. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пластинки. Задача существенно упрощается в случае поперечных колебаний, когда пренебрегаются как тангенциальные перемещения срединой плоскости пластинки, так и влияния инерции вращения. Положив $X^{\pm}=Y^{\pm}=0$, из (1.6) для отмеченного случая получим систему свободных колебаний пластинки [3]. Рассмотрим случай, когда толщина пластинки от координат x,y зависит линейно – $h=h_0+h_1x+h_2y$

Здесь h_0,h_1,h_2 – заданные постоянные.

Примем обозначения:

$$x=\bar{x}a,\ y=\bar{y}b=\bar{y}am,\ (b=am),\ h=h_0H,\ B_{ij}=\alpha_{ij}B_{11},\ a_{44}=\beta a_{55}$$

$$a_{55}B_{11}=\chi,\ \omega^2=B_{11}\Omega^2/\rho a^2,\ \varphi_1=B_{11}\varphi\cos\omega t,\ w=h_0f\cos\omega t \tag{2.1}$$

$$\psi_1=B_{11}\psi\cos\omega t,\ h_0/a=s,\ h_1/s=\gamma_1,\ h_2/s=\gamma_2$$

Имея в виду (2.1), уравнения свободных поперечных колебаний пластинки (1.6) можно представить в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left(\gamma_1\varphi+\gamma_2\psi\right)+\frac{3}{2}s\Omega^2 f=L_1\left(f,\varphi,\psi\right)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}+\frac{2}{H}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{12}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_1+2\frac{\alpha_{66}\gamma_2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\beta}{m}\left(\alpha_{12}+\alpha_{66}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+\right.$$

$$+\beta\left(\alpha_{12}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_2\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\varphi=L_2(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\alpha_{22}}{m^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{y}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left[\left(\alpha_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_2+2\frac{\alpha_{66}\gamma_1}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\beta\left(\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2}+\alpha_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2}\right)+\frac{\alpha_{12}+\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\Bigg[\alpha_{12}\gamma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+$$

$$+\beta\left(\alpha_{22}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\psi=L_3(f,\varphi,\psi)=0 \qquad (2.2)$$

Безразмерная толщина $H=1+\gamma_1\bar{x}+\gamma_2 m\bar{y}$.

3. Рассмотрим одну схему приближенного определения собственных частот прямоугольных пластин переменной толщины при учете деформации поперечных сдвигов. Будем пользоваться методом Ритца [4]. Пусть каждая тройка соответствующих членов рядов

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}f_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}B_{ij}\varphi_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ij}\psi_{ij}(\bar{x},\bar{y}) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет данным краевым условиям пластинки, но не удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.2). Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – произвольные постоянные. Имея в виду (1.3) и (2.1), нетрудно убедиться, что функции $A_{ij}f_{ij}$ представляют собой амплитудные значения безразмерных виртуальных прогибов, а функции $B_{ij}\varphi_{ij}$, $C_{ij}\psi_{ij}$ пропорциональны соответствующим амплитудным значениям виртуальных деформаций поперечных сдвигов пластинки. После подстановки (3.1) в левые части уравнений (2.2) получаются величины, отличные от нуля. Эти величины можно рассмотреть как некоторую распределенную нагрузку $\bar{Z}_2$ и перерезывающие силы $\bar{N}_x, \bar{N}_y$. Нагрузка $\bar{Z}_2$ может совершать работу на виртуальных прогибах, а перерезывающие силы $\bar{N}_x$ и $\bar{N}_y$ – на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов.

Следуя методу Ритца, приравним нулю работу $\bar{Z}_2$ и $\bar{N}_x, \bar{N}_y$ на соответствующих виртуальных прогибах и деформациях:

$$\int_0^1\int_0^1\left[L_1(f,\varphi,\psi)\delta f_{ij}+L_2(f,\varphi,\psi)\delta\varphi_{ij}+L_3(f,\varphi,\psi)\delta\psi_{ij}\right]d\bar{x}d\bar{y}=0 \qquad (3.2)$$

Так как вариации δf_{ij}, $\delta\varphi_{ij}$, $\delta\psi_{ij}$ произвольны и независимы друг от друга, то из (3.2) следует:

$$\int_0^1\int_0^1 L_1(f,\varphi,\psi)f_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0, \qquad \int_0^1\int_0^1 L_2(f,\varphi,\psi)\varphi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0$$

$$\int_0^1\int_0^1 L_3(f,\varphi,\psi)\psi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0, \qquad i=1,2,\ldots n,\ j=1,2,\ldots k \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.3) образуют систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} и C_{ij}. Значения собственных частот поперечных колебаний пластинки можно определить из условия существования нетривиальных решений этой системы, т.е. из условия равенства нулю ее определителя. Конечность числа членов выражения (3.1) накладывает определенные ограничения на возможные формы изогнутой пластинки. Это равносильно искусственному повышению жесткости пластинки, в силу чего найденные приближенные значения собственных частот будут выше соответствующих точных значений.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о свободных поперечных колебаниях ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при шарнирном опираний ее кромок. Положив $\gamma_2 = 0, \gamma_1 = \gamma$, из (2.2) получим:

$$2H\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 4\gamma\varphi + 3Hsf\Omega^2 = L_1(f,\varphi) = 0$$

$$s^3H^2\frac{d^3 f}{d\bar{x}^3} + 2s^3\gamma H\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - \chi s^2 H^2\frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} - 2\chi\gamma s^2 H\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 8\varphi = L_2(f,\varphi) = 0$$

$$\psi \equiv 0 \qquad (4.1)$$

Условия шарнирного опирания с учетом (2.1) примут вид [1]:

при $\bar{x} = 0,\ \bar{x} = 1$

$$\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi}{s}\frac{d\varphi}{d\bar{x}} = 0 \qquad \left(M_x\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\right)$$

$$f = 0 \qquad \left(w\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\right) \qquad (4.2)$$

Нетрудно убедиться, что выражения

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin i\pi\bar{x}, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} B_i \cos i\pi\bar{x} \qquad (4.3)$$

удовлетворяют краевым условиям (4.2), а дифференциальным уравнениям задачи (4.1) — нет. С учетом (4.3) уравнения виртуальных работ (3.3) представим в виде

$$\int_0^1 L_1(f,\varphi)\sin i\pi\bar{x}\,d\bar{x} = 0, \quad \int_0^1 L_2(f,\varphi)\cos i\pi\bar{x}\,d\bar{x} = 0, \quad i = 1,2,...n \qquad (4.4)$$

Особый интерес представляет простейший случай, когда из рядов (4.3) берутся только первые члены. Тогда получим систему

$$3s^2\Omega^2 A_1 - 2\pi B_1 = 0$$

$$\pi s^3\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2 - 3)\right]A_1 - \left\{48 + \chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2-3)\right]\right\}B_1 = 0 \qquad (4.5)$$

Очевидно, что из системы (4.6) можно определить лишь значения первой собственной частоты

$$\Omega_1 = \Omega_{01}\sqrt{1-d}, \quad d = \frac{\chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2-3)\right]}{48 + \chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2-3)\right]} \qquad (4.6)$$

Здесь Ω_{01} соответствует классической постановке задачи, не учитывающей влияние поперечного сдвига —

$$\Omega_{01}=\Omega_1\Big|_{\chi=0}=\frac{\sqrt{2}\pi s}{12}\sqrt{6\pi^2(1+\gamma)+\gamma^2(2\pi^2-3)} \qquad (4.7)$$

Из формулы (4.6) видно, что учет влияния поперечного сдвига $(\chi>0)$ приводит к уменьшению первой собственной частоты.

В случае полосы постоянной толщины $\gamma=0$ и из (4.6), (4.7) получим:

$$\Omega_{01}=\frac{\sqrt{3}\pi^2 s}{6},\quad \Omega_1=\Omega_{01}\sqrt{1-d},\ \ d=\frac{\chi\pi^2 s^2}{8+\chi\pi^2 s^2} \qquad (4.8)$$

Эти значения совпадают с соответствующими точными значениями, поскольку в случае постоянной толщины, выражения (4.3) кроме условий шарнирного опирания удовлетворяют еще и дифференциальным уравнениям (4.1), т.е. являются решением краевой задачи.

Сравнивая с аналогичными результатами С.А. Амбарцумяна d^* [1], замечаем

$$d^*=\frac{\chi\pi^2 s^2}{10+\chi\pi^2 s^2}<d=\frac{\chi\pi^2 s^2}{8+\chi\pi^2 s^2} \qquad (4.9)$$

В силу этого поправка, вносимая учетом поперечного сдвига на первую собственную частоту полосы постоянной толщины, по теории [2] получается немного большей, чем по теории [1]. Например, при $\chi=10,\ s=0{,}125$ она составляет по теории [2] 8,44%, а по теории [1] – 6,92%. При $\chi=20,\ s=0{,}125$ она составляет 15,04% и 12,58% соответственно.

В нижеприведенной таблице представлены значения первых n частот $(n=1,2,\dots,5)$ свободных колебаний полосы линейно-переменной толщины, определенные по методу Ритца при $s=0.125,\ \gamma=1$ и некоторых значениях параметра χ. С целью сравнения в начале таблицы приведены точные значения первых двух частот полосы, заимствованные с работы [3].

В последних двух строках каждой части таблицы (для каждого n) приведены величины

$$\Delta_i=\frac{\Omega_i^p-\Omega_i}{\Omega_i}100\%,\quad (i=1;2) \qquad (4.10)$$

которые показывают, на сколько процентов отличаются значения первых двух частот Ω_i^p, определенные по методу Ритца, от соответствующих точных значений Ω_i. Отметим, что величины Δ_i при $i>2$ не приводятся из-за отсутствия соответствующих точных значений Ω_i.

Из таблицы видно, что при двучленной аппроксимации решений, т.е. когда в рядах (4.3) удерживаются по два члена $(n=2)$, первая частота Ω_1 определяется с точностью порядка 0.3%, а вторая частота Ω_2 – 5%. При трехчленной аппроксимации $(n=3)$ значения первой частоты практически совпадают с точными значениями. А значения второй частоты отличаются от точных значений не более чем на 0.4%. С возрастанием параметра χ точность метода Ритца заметно улучшается.

Таким образом, метод Ритца приводит к довольно хорошим результатам и в случае переменной толщины и учета поперечного сдвига.

Таблица

$s = 0.125 \quad \gamma = 1$

Точное решение по [1]	χ	0	1	2	5	10	20
	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.090	1.938	1.814	1.549	1.285	1.008
n=2	Ω_1	0.5155	0.5055	0.4958	0.4702	0.4350	0.3833
	Ω_2	2.202	2.025	1.884	1.591	1.309	1.020
	Δ_1	0.30	0.29	0.26	0.26	0.21	0.19
	Δ_2	5.36	4.49	3.86	2.71	1.87	1.08
n=3	Ω_1	0.5144	0.5044	0.4949	0.4693	0.4343	0.3829
	Ω_2	2.098	1.944	1.819	1.552	1.287	1.009
	Ω_3	4.973	4.172	3.665	2.824	2.182	1.624
	Δ_1	0.08	0.08	0.08	0.06	0.05	0.03
	Δ_2	0.38	0.31	0.28	0.19	0.16	0.09
n=4	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.092	1.939	1.815	1.550	1.286	1.009
	Ω_3	4.716	4.020	3.562	2.778	2.161	1.615
	Ω_4	8.885	6.692	5.596	4.061	3.039	2.218
	Δ_1	0	0	0	0	0	0
	Δ_2	0.10	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
n=5	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.090	1.938	1.814	1.549	1.285	1.008
	Ω_3	4.698	4.010	3.556	2.775	2.160	1.615
	Ω_4	8.386	6.483	5.475	4.017	3.021	2.211
	Ω_5	13.96	9.391	7.561	5.282	3.884	2.805
	Δ_1	0	0	0	0	0	0
	Δ_2	0	0	0	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов.Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2000. 122с.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные колебания ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов // Докл. НАН РА. 1999. Т. 99. С.116-122.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.11.2000