

И. А. ВЕКОВИЦЕВА

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ПО ВСЕМУ КОНТУРУ

Рассмотрим краевую задачу об изгибе тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки, опертой (шарнирно закрепленной) по всему контуру. В работе [1] получено, что задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $w(x_1, x_2)$ — прогиба срединной плоскости и $V(x_1, x_2)$ — распределения потенциала срединной поверхности

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{h} L_3 V = q, \quad L_3 w + \frac{2}{h} L_2 V = 0 \quad (1)$$

Здесь линейные операторы с частными производными

$$L_4 = B_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4B_{13} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4B_{23} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$L_3 = B_{14} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{15} + 2B_{34}) \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{45}) \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + B_{25} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \quad (2)$$

$$L_2 = B_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{43} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$q = q(x_1, x_2)$ — интенсивность распределенной нагрузки, действующей на пластинку нормально к срединной плоскости в ее недеформированном состоянии, B_{ij} — постоянные коэффициенты, связанные с толщиной h и материальными константами среды.

Краевая задача состоит в определении двух неизвестных функций w и V , удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (1) и следующим граничным условиям:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a$$

$$w = 0$$

$$-(B_{11} w'_{11} + B_{12} w'_{22} + 2B_{13} w'_{12}) + \frac{2}{h} (B_{14} V_1 + B_{15} V_2) = 0$$

$$B_{14} w'_{11} - B_{24} w'_{22} + 2B_{34} w'_{12} + \frac{2}{h} (B_{44} V_1 - B_{45} V_2) = 0 \quad (3)$$

при $x_1 = 0$, $x_2 = b$

$w = 0$

$$\begin{aligned}
 & -(B_{12}\bar{w}'_{11} + B_{22}\bar{w}'_{22} + 2B_{33}\bar{w}'_{12}) + \frac{2}{h}(B_{34}V_1 + B_{35}V_2) = 0 \\
 & B_{13}\bar{w}'_{11} + B_{23}\bar{w}'_{22} + 2B_{33}\bar{w}'_{12} + \frac{2}{h}(B_{43}V_1 + B_{53}V_2) = 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Функции со штрихами обозначают производные по аргументам, указываемым нижними индексами.

Для решения задачи применим метод малого параметра, известный в литературе и нашедший широкое распространение в работах В. С. Саркисяна [2]. Для этого перепишем систему (1) в виде

$$A_1[w] + \mu A_2[w, V] = q, \quad A_3[V] + \mu A_4[w, V] = 0 \quad (5)$$

вводя новые обозначения для операторов

$$\begin{aligned}
 A_1 &= B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
 A_2 &= \frac{4B_{13}}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{4B_{23}}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{h^2} \left[B_{34} \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} + \right. \\
 & \left. + (B_{15} - 2B_{34}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2^2} - B_{25} \frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3} \right] \\
 A_3 &= \frac{2}{h} \left(B_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + B_{55} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right) \\
 A_4 &= \frac{4B_{43}}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{\mu} \left[B_{14} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{15} + 2B_{34}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \right. \\
 & \left. + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + B_{25} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

Такое введение малого параметра в основные уравнения и граничные условия содержит в себе два физических предположения:

1) в матрице равновесных свойств коэффициенты, стоящие на главной диагонали, больше, чем соответствующие недиагональные значения упругих и диэлектрических коэффициентов,

2) основные процессы в пьезокристалле больше, чем процессы взаимодействия полей. Иными словами, при действии на пьезокристалл заданных деформаций возникающие механические усилия больше, чем усилия, вызываемые электрическим полем, происходящим от заданных деформаций. И наоборот, при действии электрического поля возникающая поляризация больше, чем поляризация, вызываемая деформацией, определяемой электрическим полем.

Отметим, что второе предположение не говорит о слабой электромеханической связи. Такое соотношение будет иметь место в любых, в том числе и сильных, пьезоэлектриках.

Будем искать решение системы (5) в виде рядов по степеням малого параметра μ

$$w = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \mu^m, \quad V = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} V_m \mu^m \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и приравнявая выражения при одинаковых степенях μ , получим

$$\begin{aligned} A_1[w_0] &= q_0, & A_1[w_m] &= q_m \\ A_3[V_0] &= 0, & A_4[V_m] &= Q_m \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (8)$$

вводя обозначения для правых частей

$$\begin{aligned} q_0(x_1, x_2) &= q(x_1, x_2) \\ q_m(x_1, x_2) &= -A_2[w_{m-1}, V_{m-1}] \\ Q_m(x_1, x_2) &= -A_4[w_{m-1}, V_{m-1}] \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (9)$$

Преобразуем граничные условия. Для этого запишем их в виде: при $x_1 = 0$, $x_1 = a$ $w_{12}^* = 0$, тогда

$$w = 0, \quad w_{12}^* = \mu B_1, \quad V_1^* = \mu B_2 \quad (10)$$

где обозначены

$$B_1 = -\frac{2B_{13}}{\mu B_{11}} w_{12}^* + \frac{2}{\mu h B_{11}} (B_{14} V_1^* + B_{15} V_2^*) \quad (11)$$

$$B_2 = -\frac{h}{2B_{34}} \left(\frac{2B_{45}}{h^3} V_2^* + \frac{B_{14}}{\mu} w_{11}^* + \frac{2B_{34}}{\mu} w_{12}^* \right) \quad (12)$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = b$ $w_{11}^* = 0$, тогда

$$w = 0; \quad w_{22}^* = \mu B_3, \quad V_2^* = \mu B_4 \quad (13)$$

где обозначены

$$B_3 = -\frac{2B_{23}}{\mu B_{22}} w_{12}^* + \frac{2}{\mu h B_{22}} (B_{24} V_1^* + B_{25} V_2^*) \quad (14)$$

$$B_4 = -\frac{h}{2B_{35}} \left(\frac{2B_{45}}{\mu h} V_1^* + \frac{B_{25}}{\mu} w_{22}^* + \frac{2B_{35}}{\mu} w_{12}^* \right) \quad (15)$$

Принимая во внимание (7) и выполняя ряд преобразований, получим окончательно граничные условия

при $x_1 = 0, x_1 = a$

$$w_m = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

$$(w_0)_{11} = 0, \quad (w_m)_{11} = B_1[w_{m-1}, V_{m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (16)$$

$$(V_0)_{11} = 0, \quad (V_m)_{11} = B_2[w_{m-1}, V_{m-1}]$$

при $x_2 = 0, x_2 = b$

$$w_m = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

$$(w_0)_{22} = 0, \quad (w_m)_{22} = B_3[w_{m-1}, V_{m-1}] \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (17)$$

$$(V_0)_{22} = 0, \quad (V_m)_{22} = B_4[w_{m-1}, V_{m-1}]$$

Итак, решение поставленной задачи сводится к решению рекуррентных систем дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющих граничным условиям (16) и (17).

Для нахождения первого приближения ($m = 0$) нужно решить две крайние задачи

$$I. \quad A_1[w_0] = q \quad (18)$$

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w_0 = 0, \quad (w_0)_{11} = 0$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad w_0 = 0, \quad (w_0)_{22} = 0$$

$$II. \quad A_3[V_0] = 0 \quad (19)$$

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (V_0)_{11} = 0$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad (V_0)_{22} = 0$$

Решение задачи I ищем в виде

$$w_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (20)$$

удовлетворяющем всем граничным условиям. Для определения коэффициентов A_{pq} разложим функцию $q(x_1, x_2)$ в двойной ряд Фурье

$$q(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (21)$$

где

$$a_{pq} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} dx_1 dx_2 \quad (22)$$

Подставляя (20) и (21) в (18) и сравнивая коэффициенты, находим A_{pq}

$$A_{pq} = \frac{a_{pq}}{\pi^4 \left[B_{11} \left(\frac{P}{a} \right)^4 + 2(B_{12} + 2B_{33}) \left(\frac{P}{a} \right)^2 \left(\frac{q}{b} \right)^2 + B_{33} \left(\frac{q}{b} \right)^4 \right]} = \frac{a_{pq}}{\pi^4} \quad (23)$$

Тогда для $w_0(x_1, x_2)$ будем иметь

$$w_0(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\alpha_{pq}^*}{\pi^4} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \quad (24)$$

Задача II представляет собой однородное уравнение (уравнение Лапласа) с однородными граничными условиями для производных. Такая задача имеет решение

$$V_0(x_1, x_2) = 0 \quad (25)$$

Приступим к построению второго приближения ($m=1$). Из (8) с учетом (6) и (24) следует

$$A_1[w_1] = q_1[w_0, V_0], \quad A_3[V_1] = Q_1[w_0, V_0] \quad (26)$$

где

$$q_1 = \sum_p \sum_q b_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b}$$

$$b_{pq} = \frac{4\alpha_{pq}^*}{\pi^4} \frac{pq}{ab} \left[B_{13} \left(\frac{p}{a} \right)^2 + B_{23} \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right]$$

$$Q_1 = \sum_p \sum_q \left(\gamma_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} + \beta_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b} \right)$$

$$\gamma_{pq} = \frac{h}{2\pi^2} \alpha_{pq}^* \left[B_{11} \left(\frac{p}{a} \right)^3 + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{p}{a} \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right]$$

$$\beta_{pq} = \frac{h}{2\pi^2} \alpha_{pq}^* \left[(B_{15} + 2B_{34}) \left(\frac{p}{a} \right)^2 \frac{q}{b} + B_{25} \left(\frac{q}{b} \right)^3 \right]$$

α_{pq}^* — обозначение постоянной, введенное в (23). Из (9) с учетом (24) будем иметь граничные условия для функций w_1 и V_1

при $x_1 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11}^* = f_1(x_2), \quad (V_1)_{11}^* = F_1(x_2)$$

при $x_1 = a$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11}^* = f_2(x_2), \quad (V_1)_{11}^* = F_2(x_2)$$

при $x_2 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22}^* = \tau_1(x_1), \quad (V_1)_{22}^* = \Phi_1(x_1)$$

при $x_2 = b$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22}^* = \tau_2(x_1), \quad (V_1)_{22}^* = \Phi_2(x_1)$$

Обозначим предварительно

$$-\pi^2 \mu ab = \frac{1}{c}, \quad \alpha_{pq}^* pq \cos \frac{p\pi x_1}{a} = c_{pq}^{(1)}$$

$$\alpha_{pq}^* pq \cos \frac{q\pi x_2}{b} = c_{pq}^{(2)}$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned}
 f_1(x_2) &= \frac{2B_{13}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)}, & F_1(x_2) &= \frac{hB_{33}c}{B_{44}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} \\
 f_2(x_2) &= \frac{2B_{13}c}{B_{11}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} (-1)^p, & F_2(x_2) &= \frac{hB_{33}c}{B_{44}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(2)} (-1)^p \quad (27) \\
 \varphi_1(x_1) &= \frac{2B_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)}, & \Phi_1(x_1) &= \frac{hB_{35}c}{B_{55}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} \\
 \varphi_2(x_1) &= \frac{2B_{23}c}{B_{22}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} (-1)^q, & \Phi_2(x_1) &= \frac{hB_{35}c}{B_{55}} \sum_p \sum_q c_{pq}^{(1)} (-1)^q
 \end{aligned}$$

Для решения этих задач применим метод сведения неоднородных задач к однородным. Для этого сформулируем и решим четыре вспомогательные задачи

$$\text{IIIa} \quad A_1[\bar{w}_1] = \frac{1}{2} q_2 [w_0, V_0] \quad (28)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= f_1(x_2) \\
 x_1 = a \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= f_2(x_2) \\
 x_2 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= 0 \\
 x_2 = b \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{IIIб} \quad A_1[\bar{w}_1] = \frac{1}{2} q_1 [w_0, V_0] \quad (29)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= 0 \\
 x_1 = a \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{11} &= 0 \\
 x_2 = 0 \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= \varphi_1(x_1) \\
 x_2 = b \quad \bar{w}_1 &= 0, & (\bar{w}_1)_{22} &= \varphi_2(x_1)
 \end{aligned}$$

$$\text{IVa} \quad A_2[\bar{V}_1] = \frac{1}{2} Q_1 [w_0, V_0] \quad (30)$$

при

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad (\bar{V}_1)_{11} &= F_1(x_2) \\
 x_1 = a \quad (\bar{V}_1)_{11} &= F_2(x_2) \\
 x_2 = 0 \quad (\bar{V}_1)_{22} &= 0 \\
 x_2 = b \quad (\bar{V}_1)_{22} &= 0
 \end{aligned}$$

$$IV\delta \quad A_3[\bar{V}_1] = \frac{1}{2} Q_1[w_0, V_0] \quad (31)$$

при

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad (\bar{V}_1)_1 = 0 \\ x_1 = a & \quad (\bar{V}_1)_1 = 0 \\ x_2 = 0 & \quad (\bar{V}_1)_2 = \psi_1(x_1) \\ x_2 = b & \quad (\bar{V}_1)_2 = \psi_2(x_1) \end{aligned}$$

Решение задачи Ша ищем в таком виде, чтобы удовлетворить однородным условиям

$$\bar{w}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (32)$$

Представим правую часть уравнения (28) в виде тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2} q_1[w_0, V_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(x_1) &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \\ b_{pn} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \frac{b_{pq}}{n^2 - q^2} [1 - (-1)^{n-q}] \end{aligned}$$

Подставляя (32) и (33) в (28) и сравнивая коэффициенты, получим для $\bar{X}_n(x_1)$ обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\bar{X}_n^{IV} - 2 \frac{B_{12} + 2B_{33}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \bar{X}_n + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \bar{X}_n = \frac{\bar{q}_n(x_1)}{B_{11}} \quad (34)$$

Общее решение уравнения (34) состоит из суммы

$$\bar{X}_n = \bar{X}_n^0 + \bar{X}_n^1 \quad (35)$$

где

$$\bar{X}_n^1 = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{M}_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \quad (36)$$

$$\bar{M}_{pn} = \frac{b_{pn}}{\pi^4 \left[\left(\frac{p}{a}\right)^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{33})}{B_{11}} \left(\frac{p}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]}$$

является частным решением неоднородного дифференциального урав-

нения (34), а \bar{X}_n^j — общим решением соответствующего однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{2(B_{12} - 2B_{22})}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \lambda^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0 \quad (37)$$

может иметь четыре корня одного из типов: 1) $\pm \frac{n\pi}{b} s_1, \pm \frac{n\pi}{b} s_2, s_1 > 0, s_2 > 0$ — вещественные разные, 2) $\pm s$ ($s > 0$) — вещественные равные, 3) $\pm s \pm it$ ($s > 0, t > 0$) — комплексные. В дальнейшем будем рассматривать только первый тип, так как случаи 2) и 3) можно получить из 1) путем предельного перехода или отделения вещественной и мнимой частей

$$\bar{X}_n^j = \bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_1 x_1 + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_1 x_1 + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 x_1 + \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_1 \quad (38)$$

Подставляя (36) и (38) в (32), находим

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(x_1, x_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_1 x_1 + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_1 x_1 + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 x_1 + \right. \\ & \left. + \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 x_1 + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{M}_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \right) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (39) \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования представим функции $f_1(x_2)$ и $f_2(x_2)$, заданные выражениями (27), в виде

$$f_1(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \sin \frac{n\pi x_2}{b}; \quad f_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1n} &= \frac{4B_{12}n}{12B_{11}n^2ab} \sum_p \sum_q \frac{a_{pq}pq}{q^2 - n^2} [1 - (-1)^{p+q}] \\ f_{2n} &= \frac{4B_{12}n}{12B_{11}n^2ab} \sum_p \sum_q \frac{a_{pq}pq(-1)^p}{q^2 - n^2} [1 - (-1)^{p+q}] \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям задачи (28), составим систему четырех уравнений для определения четырех постоянных интегрирования

$$0 = \bar{A}_n + \bar{C}_n + \bar{X}'_n(0)$$

$$0 = \bar{A}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_1 a + \bar{B}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_1 a + \bar{C}_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 a + \bar{D}_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 a - \bar{X}'_n(a)$$

$$f_{1n} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 (\bar{A}_n s_1^2 + \bar{C}_n s_2^2) + [\bar{X}'_n(0)]'' \quad (41)$$

$$f_{20} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\bar{A}_n s_1^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_1 a - \bar{B}_n s_1^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_1 a - \bar{C}_n s_2^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 a + \right. \\ \left. + \bar{D}_n s_2^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 a \right) + [\bar{X}_n(a)]^2$$

Методика решения задач (29), (30), (31), а также соответствующих задач третьего и более высоких приближений никаких принципиальных отличий от изложенной выше не имеет.

Рассмотрим конкретный пример прямоугольной пластинки с размерами $a > b$, вырезанной из кристалла бирфалата калия [3]. Исходная система (1) имеет вид

$$(0.1505 w_{111}^{IV} - 0.452 w_{112}^{IV} + 0.128 w_{222}^{IV}) \cdot 10^{12} - \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{h} (0.118 V_{11} - 0.339 V_{12}) \cdot 10^9 = q_0 \quad (42)$$

$$(0.118 w_{111} - 0.339 w_{222}) \cdot 10^9 - \frac{2}{h} (4.08 V_{11} - 5.98 V_{22}) = 0$$

с граничными условиями согласно (3) и (4)

при

$$x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad w = 0$$

$$-(0.1505 w_{11}^{\cdot} - 0.0745 w_{21}^{\cdot}) \cdot 10^{12} + \frac{2}{h} 0.118 V_1^{\cdot} \cdot 10^9 = 0$$

$$(0.118 w_{11}^{\cdot} - 0.585 w_{21}^{\cdot}) \cdot 10^9 + \frac{2}{h} 4.08 V_1^{\cdot} = 0 \quad (43)$$

при

$$x_2 = 0, \quad x_2 = b, \quad w = 0$$

$$-(0.0745 w_{11}^{\cdot} + 0.128 w_{22}^{\cdot}) \cdot 10^{12} - \frac{2}{h} 0.585 V_1^{\cdot} \cdot 10^9 = 0$$

$$-0.246 w_{12}^{\cdot} \cdot 10^9 + \frac{2}{h} 5.98 V_2^{\cdot} = 0 \quad (44)$$

Вводя малый параметр, получим системы рекуррентных дифференциальных уравнений

$$0.1505 (w_m)_{111}^{IV} - 0.452 (w_m)_{112}^{IV} + 0.128 (w_m)_{222}^{IV} = q_m \\ 4.08 (V_m)_{11} - 5.98 (V_m)_{22} = Q_m \quad (45)$$

где

$$q_m = \frac{10^{-5}}{2\pi a} [0.118 (V_{m-1})_{111} - 0.339 (V_{m-1})_{122}] \\ (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (46)$$

$$Q_m = -\frac{10^9}{2\pi} [0.118 (w_{m-1})_{111} + 0.339 (w_{m-1})_{122}]$$

и граничные условия при $x_2 = 0$, $x_2 = a$

$$w_m = 0; \quad (w_m)_{11} = \frac{1.57}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_1; \quad (V_m)_1 = -\frac{1.45}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{11}$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = b$

$$w_m = 0; \quad (w_m)_{22} = \frac{9.15}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_2; \quad (V_m)_2 = \frac{2.06}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{22}$$

Следуя изложенной выше методике, ограничиваясь первыми тремя приближениями, получим решение

$$\begin{aligned} w = \sum_p \sum_q & \left\{ \frac{0.197 q_0 \cdot 10^{-3} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b}}{pq \left[0.1505 \left(\frac{p}{a} \right)^4 + 0.452 \left(\frac{p}{a} \right)^2 \left(\frac{q}{b} \right)^2 + 0.128 \left(\frac{q}{b} \right)^4 \right]} \right\} + \\ & + \mu^2 \sum_n \left\{ \left[A_{2n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{2n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \left(\sum_q C_{2nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) + \right. \right. \\ & + D_{2n} \operatorname{ch} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + E_{2n} \operatorname{sh} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + G_{2n} \operatorname{ch} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} + \\ & \left. \left. + H_{2n} \operatorname{sh} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} \right] \sin \frac{n\pi x_1}{a} \right\} \\ V = \mu \sum_n & \left\{ \left[A_{1n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{1n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sum_q C_{1nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) \right] \cos \frac{n\pi x_1}{a} \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

Если рассмотреть в полученных рядах первые приближения, то прогиб центра пластинки имеет значения для пластинки с размерами $a = 1$ см, $b = 1$ см, $h = 0.1$ см

$$w = 23.5 q_0 \cdot 10^{-5} \text{ (см)}$$

для пластинки с размерами $a = 2$ см, $b = 1$ см, $h = 0.1$ см

$$w = 28.15 q_0 \cdot 10^{-5} \text{ (см)}$$

В заключение сделаем важное замечание об оценке величины малого параметра μ . Сравнить операторы с помощью сравнения их коэффициентов не представляется возможным, так как эти коэффициенты имеют разную размерность.

Характеристический определитель исходной системы (42)

$$\begin{vmatrix} 0.128 \lambda^4 + 0.452 \lambda^2 + 0.1505 & -\frac{1}{2\pi} (0.339 \lambda^2 + 0.118) \\ \frac{h}{2} (0.339 \lambda^2 + 0.118) & 5.98 \lambda^2 + 4.08 \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i1.77; \quad \lambda_{3,4} = \pm i0.827; \quad \lambda_{5,6} = \pm i0.615 \quad (49)$$

Характеристические уравнения приближенных уравнений

$$0.128 \lambda^4 + 0.452 \lambda^2 + 0.1505 = 0; \quad 5.98 \lambda^2 + 4.08 = 0 \quad (50)$$

имеют корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i1.755; \quad \lambda_{3,4} = \pm i0.67; \quad \lambda_{5,6} = \pm i0.59 \quad (51)$$

Сравнение корней (49) и (51) позволяет считать, что приближенная совокупность дифференциальных уравнений действительно мало отличается от исходной системы. Таким образом, подтверждается правомерность введения малого параметра μ . Оценка малого параметра μ , величина которого лежит в пределах

$$0.0085 \leq \mu \leq 0.19$$

получается из относительной погрешности в значениях корней (51) по сравнению с (49).

Ի. Ա. ՎԵՎՈՎԻՇՉԵՎԱ

ԵԶՐԱԳՅՈՒՎ ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱՅ ՈՒՂԱՅՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ԹՅԵՉՈՒՆԵԿՏՐԱԿԱՆ
ԲԱՐՈՎ ՍԱԼԻ ԾՈՌԻՄՈՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փոքր պարամետրի եղանակով լուծվում է եզրայծով ազատ հենված ոչկո-
որելիկտրական բարակ սալի ծածան վերաբերյալ եզրային խնդիր: Տրվում են
վիճային օրինակ և փոքր պարամետրի մեծության գնահատականը:

THE BENDING OF A THIN RECTANGULAR PIEZOELECTRIC PLATE SUPPORTED THROUGHOUT ITS BOUNDARIES

I. A. VEKOVISHCHEVA

S u m m a r y

Small parameter technique solves the boundary problem of bending
a thin piezoelectric plate supported throughout its boundaries. Numerical
examples are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Веквищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 4, 1972.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, Ереван, 1970.
3. *Белая А. М.* и др. Выращивание кристаллов бифталата кадмия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография, т. 14, вып. 4, 1969.