ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

А. М. САРГСЯН

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООТДАЧИ

Исследованию термоупругих напряжений в изотропных и анизотропных пластинках, находящихся в условиях теплоотдачи, посвящено много работ [1—5].

В настоящей работе рассматривается задача термоупругости для тонкой составной пластинки. Две полубесконечные пластинки из различных материалов соединены между собой в стык вдоль общей прямолинейной границы без собственных напряжений при некоторой постоянной температуре T_0. Пластинка подвергается независящему от времени температурному воздействию линейного* источника тепла с постоянной интенсивностью q, расположенного на конечном отрезке $(-a, a)$ прямолинейного стыка. Через поверхности пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой постоянной температуры T_0 по закону Ньютона. Предполагается, что на бесконечности разность температуры пластинки и среды, а также напряжения исчезают.

При изменении температуры окружающей среды от T_0 до T_1 к искомому решению задачи термоупругого состояния составной пластинки следует добавить решение, соответствующее разности температур $T_1—T_0$ и конкретным условиям на бесконечности.

Поскольку пластинка тонкая и коэффициенты теплоотдачи с поверхностей пластинки малы по сравнению с единицей, градиент температуры по толщине незначителен, и поставленная задача сводится к двумерной задаче термоупругости [1, 2, 11].

1. Составную пластинку отнесем к декартовой системе координат (фиг. 1). Для определения температурного поля в пластинке должна быть решена система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2}-m_j^2 T_j=0 \tag{1}$$

$$|x|<\infty, \quad y>0, \quad j=1 \qquad |x|<\infty, \quad y<0, \quad j=2$$

при следующих контактных условиях:

$$T_1|_{y=0}=T_2|_{y=0} \tag{2}$$

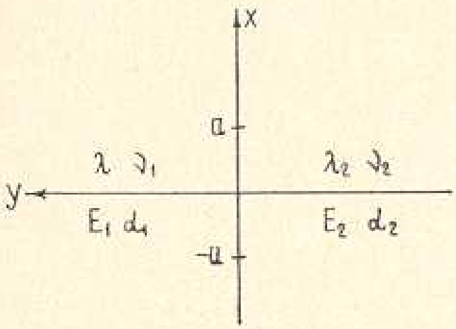
$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}-\frac{q}{h}\,\theta(a-|x|) \tag{3}$$

* Точнее говоря, рассматривается плоский источник тепла длиной 2a и шириной h, где h—толщина пластинки.

Здесь T_j — разность температур в произвольной точке пластинки и постоянной температуры среды, λ_j — коэффициенты теплопроводности материалов пластинок, h — толщина пластинок, $\theta(x)$ — функция Хевисайда,

$$m_j^2 = 2\beta_j/\lambda_j h$$

где β_j — коэффициенты теплоотдачи.



Фиг. 1

Для решения системы (1) при условиях (2), (3) применяется интегральное преобразование Фурье [7]

$$\overline{T}_j(u,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_j(x,\ y)\, e^{+iux}\, dx,\quad T_j(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{T}_j(u,\ y)\, e^{-iux}\, du \tag{4}$$

Вместо (1)—(3) получим

$$\frac{d^2\overline{T}_j}{dy^2} - (u^2 + m_j^2)\overline{T}_j = 0 \tag{5}$$

$$\overline{T}_1\big|_{y=0} = \overline{T}_2\big|_{y=0} \tag{6}$$

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1}{dy}\bigg|_{y=0} = \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2}{dy}\bigg|_{y=0} - \frac{q}{\pi h}\,\frac{\sin au}{u} \tag{7}$$

Решение (5) при условии (6), (7) имеет вид

$$\overline{T}_j(u,\ y) = \frac{q}{\pi h}\,\frac{\sin au\, e^{-|y|k_j}}{u(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)} \tag{8}$$

где

$$k_j = \sqrt{u^2 + m_j^2}$$

2. Двумерная задача термоупругости приводится к интегрированию уравнений равновесия [8]

$$\frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xyj}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xyj}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial y}=0 \tag{9}$$

и условий совместности деформации

$$\Delta(\sigma_{xj}+\sigma_{yj})+\alpha_j E_j \Delta T_j=0 \tag{10}$$

с условиями непрерывности напряжений и перемещений на линии контакта $y=0$

$$\sigma_{y1}=\sigma_{y2} \tag{11}$$

$$\sigma_{xy1}=\sigma_{xy2} \tag{12}$$

$$\sigma_{x1}-\nu_1\sigma_{y1}=\mu(\sigma_{x2}-\nu_2\sigma_{y2})+E_1(\alpha_2-\alpha_1)T_1 \tag{13}$$

$$2(1+\nu_1)\frac{\partial \sigma_{xy1}}{\partial x}-\left(\frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial y}-\nu_1\frac{\partial \sigma_{y1}}{\partial y}\right)=2(1+\nu_2)\frac{\partial \sigma_{xy2}}{\partial x}-$$
$$-\mu\left(\frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial y}-\nu_2\frac{\partial \sigma_{y2}}{\partial y}\right)-E_1\left(\alpha_2\frac{\partial T_2}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial T_1}{\partial y}\right) \tag{14}$$

где условия непрерывности перемещений u_j и v_j на линии контакта заменены условиями непрерывности $\partial u_j/\partial x$ и $\partial^2 v_j/\partial x^2$ соответственно [9].

Здесь ν_j, E_j, α_j — коэффициенты Пуассона, модули упругости и коэффициенты линейного расширения материалов; $\mu=E_1/E_2$.

Применяя к уравнениям (9)–(14) преобразование Фурье, будем иметь

$$-iu\bar{\sigma}_{xj}+\frac{d\bar{\sigma}_{xyj}}{dy}=0 \tag{15}$$

$$-iu\bar{\sigma}_{xyj}+\frac{d\bar{\sigma}_{yj}}{dy}=0 \tag{16}$$

$$\frac{d^2\bar{\sigma}_{xj}}{dy^2}+\frac{d^2\bar{\sigma}_{yj}}{dy^2}-u^2(\bar{\sigma}_{xj}+\bar{\sigma}_{yj})+\alpha_j E_j m_j^2\bar{T}_j=0 \tag{17}$$

$$\bar{\sigma}_{y1}=\bar{\sigma}_{y2}, \qquad y=0 \tag{18}$$

$$\bar{\sigma}_{xy1}=\bar{\sigma}_{xy2}, \qquad y=0 \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_{x1}-\nu_1\bar{\sigma}_{y1}=\mu(\bar{\sigma}_{x2}-\nu_2\bar{\sigma}_{y2})+E_1(\alpha_2-\alpha_1)\bar{T}_1, \qquad y=0 \tag{20}$$

$$-i2(1+\nu_1)u\bar{\sigma}_{xy1}-\left(\frac{d\bar{\sigma}_{x1}}{dy}-\nu_1\frac{d\bar{\sigma}_{y1}}{dy}\right)=-i2(1+\nu_2)u\bar{\sigma}_{xy2}-$$
$$-\mu\left(\frac{d\bar{\sigma}_{x2}}{dy}-\nu_2\frac{d\bar{\sigma}_{y2}}{dy}\right)-E_1\left(\alpha_2\frac{d\bar{T}_2}{dy}-\alpha_1\frac{d\bar{T}_1}{dy}\right) \tag{21}$$

Исключая из системы (15)—(17) $\bar{\sigma}_{xj}$ и $\bar{\sigma}_{xyj}$ с помощью

$$\bar{\sigma}_{xj} = -\frac{1}{u^2}\frac{d^2\bar{\sigma}_{yj}}{dy^2}, \qquad \bar{\sigma}_{xyj} = \frac{1}{iu}\frac{d\bar{\sigma}_{yj}}{dy} \tag{22}$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^4\bar{\sigma}_{yj}}{dy^4} - 2u^2\frac{d^2\bar{\sigma}_{yj}}{dy^2} + u^4\bar{\sigma}_{yj} = \alpha_j E_j m_j^2 \bar{T}_j e^{-|y|k_j} u^2 \tag{23}$$

Выбирая в соответствии с условиями на бесконечности общий интеграл в виде

$$\bar{\sigma}_{yj} = [A_j - (-1)^j |y| B_j] e^{-|y||u|} + \bar{T}_j b_j u^2 e^{-|y|k_j} \tag{24}$$

для остальных преобразованных напряжений получим следующие выражения:

$$\bar{\sigma}_{xj} = [(|y||u| - 2)|u|(-1)^j B_j - u^2 A_j] - \bar{T}_j b_j k_j^2 e^{-|y|k_j} \tag{25}$$

$$\bar{\sigma}_{xyj} = [(1 - |y||u|) B_j + (-1)^j |u| A_j] \frac{e^{-|y||u|}}{iu} - i(-1)^j \bar{T}_j b_j u k_j e^{-|y|k_j}$$

$$b_j = \alpha_j E_j / m_j^2 \tag{26}$$

Удовлетворяя преобразованным контактным условиям (18)—(21) с помощью (24)—(26) и (8) для неопределенных коэффициентов A_j и B_j получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
A_1 - A_2 = -Du^2(b_1 - b_2) \\
|u|(A_1 + A_2) + B_2 - B_1 = -Du^2(b_1k_1 + b_2k_2) \\
-(1+\nu_1)|u|A_1 + \mu(1+\nu_2)|u|A_2 + 2B_1 + 2\mu B_2 = \\
= Du^3[(1+\nu_1)b_1 + \mu(1+\nu_2)b_2] \\
(1+\nu_1)|u|A_1 + \mu(1+\nu_2)|u|A_2 + (1-\nu_1)B_1 - \mu(1-\nu_2)B_2 = \\
= -Du^2[(1-\nu_1)b_1k_1 + \mu(1+\nu_2)b_2k_2] \\
D = \bar{T}(u, 0)
\end{gathered} \tag{27}$$

Для A_j и B_j из (27) получим

$$\begin{aligned}
&A_1 = [((2-p)b_1 + 2\mu p b_2)u^2 - (2db_1k_1 + 2\mu p b_2k_2)u] D/pd \\
&A_2 = [(2db_1 - (dp - 2\mu p)b_2)u^2 - (2db_1k_1 + 2\mu p b_2k_2)u] D/pd \\
&B_1 = b_1(4-p)(u-k_1)u^2 D/p, \quad B_2 = b_2(4-p)(u-k_2)u^2 D/d \\
&p = 3 - \nu_1 + \mu(1+\nu_2), \qquad d = 1 + \nu_1 + \mu(3-\nu_2)
\end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя (28) в (24)—(26) и возвращаясь к оригиналу, находим напряжения σ_{xj}, σ_{yj}, σ_{xyj}

$$\sigma_{xj}=2\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{|y|u-2}{u}(-1)^j B_j-A_j\right)e^{-|y|u}-Db_jk_j^2e^{-|y|k_j}\right]\cos uxdu \quad (29)$$

$$\sigma_{yj}=2\int_0^{\infty}\left[\left(A_j-(-1)^j|y|B_j\right)e^{-|y|u}+Db_ju^2e^{-|y|k_j}\right]\cos uxdu \quad (30)$$

$$\sigma_{xyj}=2\int_0^{\infty}\left[\left((|y|u-1)B_j-(-1)^j uA_j\right)e^{-|y|u}-\right.$$

$$\left.-(-1)^j Db_ju^2k_je^{-|y|k_j}\right]\frac{\sin ux}{u}du \quad (31)$$

В выражениях (29—31) перейдем от линейного источника к точечному, устремляя $2a$ к нулю, а q — к бесконечности. При этом $2aq=Q=\text{const}$, где Q — мощность источника. В случае $\lambda_1=\lambda_2$, $m_1^2=m_2^2$, $E_1=E_2$, $\alpha_1=\alpha_2$ получим решение для изотропной пластинки, нагреваемой точечным источником тепла,

$$\sigma_x=2N\left[\frac{x^2-y^2}{r^4}-\frac{m_1K_1(m_1r)}{r}+\frac{m_1^2y^2K_2(m_1r)}{r^2}\right] \quad (32)$$

$$\sigma_y=2N\left[\frac{y^2-x^2}{r^4}-\frac{m_1K_1(m_1r)}{r}+\frac{m_1^2x^2K_2(m_1r)}{r^2}\right] \quad (33)$$

$$\sigma_{xy1}=-\sigma_{xy2}=2N\left[\frac{2xy}{r^4}-\frac{m_1^2xyK_2(m_1r)}{r^2}\right] \quad (34)$$

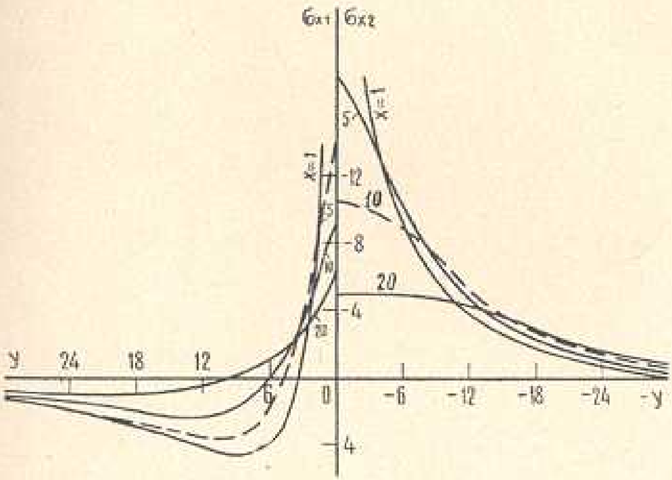
$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad N=-Qb_1/4\pi h\lambda_1$$

Это решение совпадает с решением, полученным в работе [3] в полярных координатах.

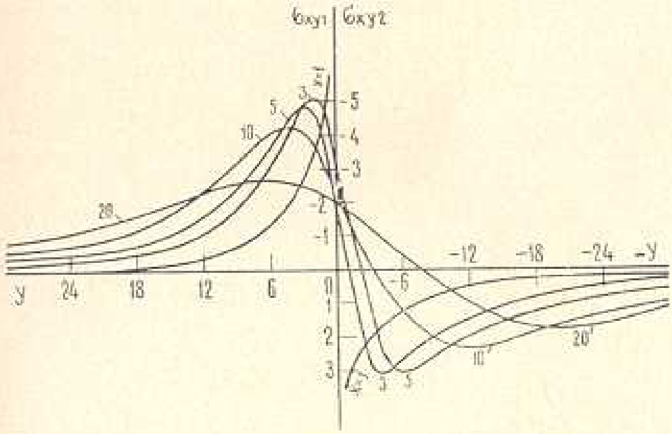
На фиг. 2—4 приведены кривые распределения напряжений в пластинке, составленной из стали (индекс 1) и алюминия (индекс 2) в зависимости от y при различных значениях x. Для параметров, входящих в (29), приняты следующие значения: $q=0.1$ *кал/см·сек*, $a=1$ *см*, $h=0.1$ *см*, $m_1^2=0.084$ *см*$^{-2}$, $m_2^2=0.002$ *см*$^{-2}$. Параметры m_1^2 и m_2^2 характеризуют теплоотдачу [10].

С целью выяснения влияния степени разнородности пластинки на термоупругие напряжения, рассмотрим однородные пластинки из стали (фиг. 5) и из алюминия (фиг. 6). По графикам, приведенным на фиг. 2, 5, 6, видно, что разнородность материала пластинки обусловливает заметное изменение напряжений в окрестности прямолинейного стыка составной пластинки как в сторону их увеличения, так и уменьшения.

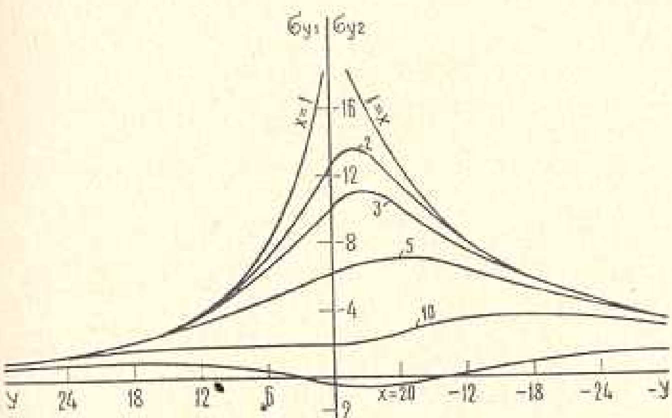
Расчеты показывают также, что с увеличением теплоотдачи с поверхностей пластинки напряжения уменьшаются.



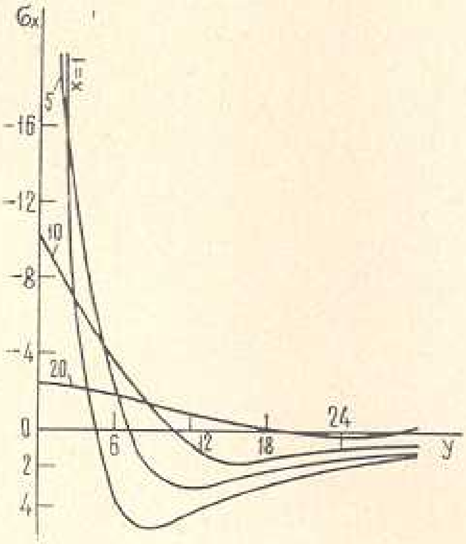
Фиг. 2.



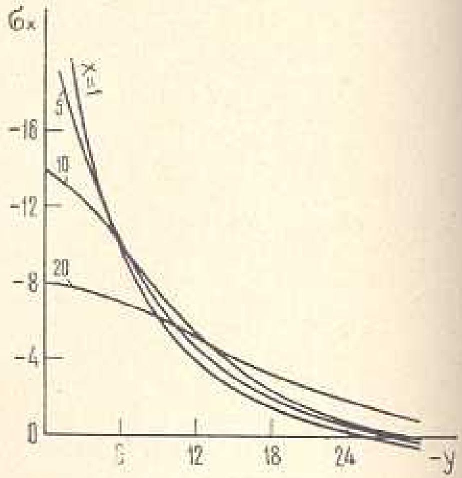
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 IX 1973

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՋԵՐՄԱՓՈԽԱՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍԱԼԻ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է տարբեր ջերմային և առաձգական հատկություններ ունեցող կիսաանվերջ սալերից կազմված, արտաքին ուժերի և կապերի չենթարկված սալի հարթ լարվածային վիճակը ժամանակի ընթացքում անփոփոխ ջերմային դաշտի ազդեցության տակ։

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ։

Ուսումնասիրված է տարասեռության և ջերմափոխանակության ազդեցությունը լարումների բաշխման վրա։

THE THERMOELASTIC PROBLEM FOR A COMPOSITE PLATE IN CONDITIONS OF HEAT EMISSION

A. M. SARGSIAN

S u m m a r y

The two-dimensional thermoelastic proplem for an infinite composite plate in conditions of heat emission is considered.

The plate undergoes a time-independent temperature effect from a linear heat source of constant intensity.

The problem is solved with the aid of Fourier's transformations. The effect of dissimilarity and heat emission on the thermal stress distribution is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Двумерная задача теории упругости для полубесконечной пластинки при наличии теплоотдачи. Прикл. механика, т. IX, в. 4, 1963.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Двумерная температурная задача теории упругости для бесконечной пластинки, по краю которой движется источник тепла. Прикл. механика, т. X, в. 2, 1964.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* О нагреве источниками тепла тонких пластинок с теплообменом. Инж-физич. журнал, т. VII, № 2, 1964.
4. *Коляно Ю. М.* Температурные напряжения в ортотропной полосе—пластинке с теплоотдачей. Прикл. механика, т. X, в. 5, 1967.
5. *Колесниченко В. А., Коляно Ю. М.* Температурные напряжения в анизотропной пластинке, нагреваемой движущимся источником тепла. «Физика и химия обработки материалов», № 5, 1971.
6. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1961.
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. ИЛ., М., 1955.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1963.
9. *Алексанян Р. К.* Термоупругие напряжения составной полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.
10. *Казимиров А. А., Недосека А. Я.* Расчет температурных полей в пластинках при электросварке плавлением. «Наукова думка», Киев, 1968.
11. *Карлсоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», М., 1964.